

Begeisterung für Mathe wecken

Lars A. Wallenborn
lars@wallenborn.net
<http://www.wallenborn.net>

29. November 2018

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
1.1	Was ist Mathematik	4
1.2	Was begeistert „echte“ Mathematiker	4
1.3	Was verursacht diese Begeisterung?	5
1.4	Zusammenfassung	6
2	Ewige Wahrheit (Beweise)	7
2.1	Mathematische Strenge	7
2.2	Zwei Striche im Rechteck	8
2.3	Quadrat im Quadrat	13
2.4	Zusammenfassung	15
3	Memes, Hypes und Trends	17
3.1	Trivia / Fun-Facts / Click Baits	17
3.2	In-Group Sprache	17
3.3	DorFuchs	18
3.4	Memes und Katzen	18
3.5	Bei Facebook Freunden glänzen	20
3.6	Hollywood: Das Good Will Hunting Problem	20
3.7	YouTube: Numberphile	24
3.8	Zusammenfassung	24
4	Mathematik als Rätsel	25
4.1	Was ist $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$?	25
4.2	Punkte zählen und Kopfrechnen	26
4.3	Knotentheorie	27
4.4	Bis zur Unendlichkeit und noch viel weiter!	27
4.5	Chaos und die Mandelbrotmenge	27
4.6	Zusammenfassung	28
5	Magie (Anwendungen)	29

5.1	Anwendung, Schwanwendung?	29
5.2	Treppe bauen	30
5.3	Bitcoin und andere Kryptowährungen	32
5.3.1	Hash-Funktionen	32
5.3.2	Blockchains	34
5.3.3	Merkle-Bäume	37
5.3.4	Motivation der Miner	37
5.4	Zusammenfassung	38
6	Abschluss und Ausblick	39

Zusammenfassung

Musik-Unterricht ohne Musik oder Instrumente ist undenkbar. Kunst-Unterricht ohne Malen oder Zeichnen auch. Was ist die Entsprechung im Mathematik-Unterricht? Wovon hängt es ab, dass Unterricht zugänglich und interessant(er) wird? Und wie unterstützen Sie Ihre Schülerinnen und Schüler, ihre eigene Leidenschaft für Mathe zu entdecken und unentdeckte Potenziale zu heben? Lars Wallenborn kennt die Formel und erarbeitet im Workshop Strategien mit neuen Methoden.

1 Einleitung

1.1 Was ist Mathematik

Wie immer, wenn man sich einem Thema das erste mal nähert, bietet Wikipedia einen Einstieg:

Die Mathematik ist eine Wissenschaft, welche aus der Untersuchung von geometrischen Figuren und dem Rechnen mit Zahlen entstand. *Für Mathematik gibt es keine allgemein anerkannte Definition*; heute wird sie üblicherweise als eine Wissenschaft beschrieben, die durch logische Definitionen selbstgeschaffene abstrakte Strukturen mittels der Logik auf ihre Eigenschaften und Muster untersucht.¹

Wie zu befürchten war, ist Mathematik selbst wahrscheinlich nicht klar definiert². Einig ist man sich unter Mathematikern aber darüber, dass Definitionen eine zentrale Rolle in der Mathematik spielen, ebenso logisches Folgern und Beweise. Wie und ob dies etwas mit dem Unterricht heutzutage zu tun hat, soll später diskutiert werden.

Mathematikunterricht bezeichnet die institutionalisierte Vermittlung von fachspezifischem Wissen sowie von Fertigkeiten und Fähigkeiten im Bereich Mathematik an Schüler durch eine meist spezifisch ausgebildete Lehrkraft sowohl in der Schule in Form eines Schulfachs, der Hochschule als auch in der Erwachsenenbildung. Der Unterricht basiert in der Regel auf einer Unterrichtsplanung, greift dabei auf Kenntnisse der Mathematikdidaktik als Fachdidaktik zurück, setzt diese praktisch mit Hilfe von Lehr- und Lernmethoden um und hat weiterhin curriculare Vorgaben zu berücksichtigen. Mathematik ist in Deutschland bis zum Abitur an allen allgemeinbildenden Schulen in allen Jahrgangsstufen verbindliches Unterrichtsfach und gilt aufgrund seines Anteils an der Stundentafel als Hauptfach.³

Trockener hätte man es nicht formulieren können. Ebenso fremd kommt es mir als Mathematiker vor: Wie wird bittesehr erwähnt, dass Mathematik eigentlich eine Kunstform ist und von vielen Praktizierenden als großes spaßiges Rätsel wahr genommen wird?!

1.2 Was begeistert „echte“ Mathematiker

In unwissenschaftlich ausgewerteten Interviews wurden in der Vorbereitung dieser Einheit die folgenden *vier* Quellen von Begeisterung identifiziert:

¹[Mat18a], Hervorhebung durch den Autor

²Verlässlichere Quellen sind, z.B. [Mur93] oder [TN12]

³[Mat18b]

1. *Intellektualität* Erwähnt man, dass man Künstler ist oder sich mit Literatur beschäftigt, kann das immer noch bedeuten, dass man den ganzen Tag arbeitslos auf der Couch sitzt oder kitschige Gedichte schreibt. „Outet“ man sich hingegen als Mathematik, so fallen Reaktionen in meiner persönlichen Erfahrung in zwei Klassen: Ehrfurcht und Abscheu. Ehrfurcht davor, dass man sich mit so etwas *Kompliziertem* beschäftigt und Abscheu davor, dass man sich *freiwillig* mit so etwas Nervigem auseinandersetzt. Aber auch diese Abscheu ist eine Form von Anerkennung.
2. *Ewige Wahrheit* Die genaue Definition von Mathematik zu verstehen ist ein weiterer Kanninchenbau, den es sich lohnt zu erforschen. An dieser Stelle wollen wir uns aber darauf konzentrieren, dass sich die Mathematik mit dem Erbauen von Gedankengebäuden beschäftigt und darin Herleitungen durchgeführt werden, die – einmal gefunden – nicht wieder „wegzudenken“ sind. Andere Wissenschaften haben diesen Vorteil nicht: Neue Theorien oder Studien können das eigene Lebenswerk für nichtig oder unwichtig erklären. Aber eine bewiesene Aussage bleibt bis in alle Ewigkeit Teil der Mathematik.
3. *Größtes Rätsel* Spielen liegt in der Natur des Menschen^[citation needed]. Und viele Mathematiker sprechen davon, dass sie die Mathematik als gigantisches Rätselspiel wahrnehmen. Sie ist ein scheinbar unversiegender Quell von neuen Herausforderungen, Aufgaben und interessanten Problemen.
4. *Magische Anwendung* Definieren wir *Magie* doch einmal als eine unerwartete physische Wirkung aufgrund einer mentalen Ursache, dann kommt Mathematik dem so nahe wie nur möglich. Hier soll besonderer Wert auf dem Ausdruck *unerwartet* liegen: Wenn ich daran denke, mir ein Glas Wasser einzugießen und es dann mache, ist diese Wirkung beispielsweise nicht unerwartet. Wenn ich mir hingegen ausdenke, wie man herausfinden kann, ob zwei verschiedene Knoten doch eigentlich der gleiche sind, die Resultate daraus Auswirkungen auf die Quantenstringtheorie haben und daraufhin dann ein globales Satelliten-Ortungssystem in Existenz tritt, dann ist das *wirklich* unerwartet.

1.3 Was verursacht diese Begeisterung?

Sir William Timothy Gowers unterscheidet in einer im Jahr 2000 veröffentlichten Schrift[**GowersTwoCultures**] zwei *Kulturen* innerhalb der Mathematik: Die *Problem-Solver* und die *Theorem-BUILDER* – also Mathematiker, die konkrete Probleme (oder Rätsel) lösen und solche, die neue Theoriegebäude bauen.

Ein Prototyp eines Problem-Solvers ist Erdős, der den Begriff der Erdős-Zahl geprägt hat und ein Protoyp für einen Theorem-Builders ist Alexander Grothendieck, der quasi im Alleingang die Algebraische Geometrie neu erfunden hat. Es ist plausibel, dass Theorem-BUILDER stark durch Motivation 2 getrieben werden, Problem-Solver stark durch Motivation 3.

Motivation 1 ist – moralisch gesehen – wahrscheinlich die „schlechteste“, denn sie fußt nur auf Anerkennung durch die eigene soziale Gruppe. Im Rahmen von Begabtenförderung kann diese Motivation sehr wirkungsvoll sein: „Ich verrate euch jetzt einen Trick, um besonders gut Matrizen zu diagonalisieren“. Es erklärt sich von selbst, dass dies in einem Rahmen, in dem Mathematik als uncool angesehen wird, weniger gut funktioniert.

Motivation 4 gebührt besondere Aufmerksamkeit, denn es wirkt als ob das Klischeebild des heutigen Schulsystems genau darauf abzielen würde. Details behandelt Abschnitt 5.1.

1.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde versucht, Mathematik zu definieren und auf Basis einer winzigen und schlecht dokumentierten und ausgewerteten empirischen Stichprobe vier mögliche Motivationen dafür aufgelistet, gerne Mathematik zu machen:

1. Intellektualität
2. Ewige Wahrheit
3. Größtes Rätsel
4. Magische Anwendung

Man selbst ist vielleicht von einer oder mehrerer dieser Motivationen getrieben. Es ist aber – gerade, wenn man andere motivieren möchte – sehr nützlich zu wissen, dass auch andere Motivationen existieren.

Die nächsten Kapitel beschäftigen sich mit Techniken, um verschieden motivierte Teilnehmer anzusprechen.

2 Ewige Wahrheit (Beweise)

Ein wichtiger Unterschied zwischen der Mathematik und anderen Wissenschaften ist, dass es in Mathematik einen definierten und allgemein anerkannten Prozess gibt, Aussagen zu finden, die wahr sind: Der Beweis. Die so gefundenen Aussagen werden danach Teil des Wahrheitsgebäudes der Mathematik und sind dann auch nicht mehr wegzudenken. Für alle Ewigkeit ist eine einmal bewiesene Aussage damit wahr. Diesen Luxus haben andere Wissenschaften nicht: Selbst in der Physik sind Theorien nicht beweisbar, sondern nur falsifizierbar. In anderen Wissenschaften, wie z.B. der Pädagogik oder Psychologie, ist es sogar so, dass Theorien in Meinungen ufern und sogar die Stimmung in der wissenschaftlichen Gemeinschaft einen Einfluss auf den „Wahrheitsgehalt“ einer Theorie hat.

Dieser Anspruch auf ewige und absolut sichere Wahrheit motiviert viele Menschen Mathematik zu machen. Man könnte sogar soweit gehen, zu sagen, dass Teil etwas Größeren zu sein für viele Menschen einen wichtigen Teil der Sinnfindung im Leben darstellt.

Weniger pathetisch angegangen sorgt die schiere Existenz des Verfahrens „Beweis“ für eine ganz besondere Kultur unter Mathematikern: Allen Beteiligten einer Diskussion ist klar, dass es dieses Verfahren gibt und es jedem (ungefähr gleichermaßen) zur Verfügung steht. Zwei Mathematiker hitzköpfig streiten zu sehen, nur um sie eine halbe Stunde später mit genau vertauschten Standpunkten wiederzutreffen, ist keine Seltenheit. Den Standpunkt schnell wechseln zu können ist einfacher, wenn sich kein Beteiligter persönlich angegriffen fühlt, dass jemand anderer Meinung ist.

2.1 Mathematische Strenge

Was ist ein Beweis?

Ein Beweis ist in der Mathematik die als fehlerfrei anerkannte Herleitung der Richtigkeit bzw. der Unrichtigkeit einer Aussage aus einer Menge von Axiomen, die als wahr vorausgesetzt werden, und anderen Aussagen, die bereits bewiesen sind.⁴

Beweisen im schulischen Kontext hat häufig einen faden Beigeschmack:

1. Es ist unnötig – in *der Klausur* kommt das nämlich nicht dran.
2. Es ist völlig unverständlich und die „hohe Kunst“.
3. Es wurde reduziert auf irgendetwas sehr obskur-mechanisches – eine Aufgabe für „Die Nerds“ oder – noch schlimmer – Maschinen.

⁴[\[https://de.wikipedia.org/wiki/Beweis \(Mathematik\)\]](https://de.wikipedia.org/wiki/Beweis_(Mathematik))

Punkt 1 erledigt sich automatisch, wenn Teilnehmer ihre Motivation aus etwas anderem ziehen als der Angst vor der nächsten Klausur. Außerdem steht es wohl jedem Lehrer frei, Beweisaufgaben mit in eine Klausur aufzunehmen.

Ein Grund für Punkt 2 mag sein, dass eine sehr zentrale Komponente beim Beweisen in der Schule völlig unter den Teppich fällt: ein Beweis basiert immer auf einer Menge von Axiomen und bereits bewiesenen Aussagen. Die Aussagen, die bereits vorhanden sind – sei es durch Postulate oder durch andere Beweise – sind häufig nicht klar getrennt von der Aussage, die zu zeigen ist.

Punkt 3 kann durch „schöne“ Beweisaufgaben aus der Welt geschafft werden.

In den nun folgenden Unterkapiteln wollen wir uns auf Punkte 2 und 3 konzentrieren.

2.2 Zwei Striche im Rechteck

Mathematik ist nicht strukturiert und langweilig! Ein Mathematiker ist kein Buchhalter. Wie ein Maler oder Dichter schafft er Muster. Nur, dass die Muster nicht aus Worten oder Farben gemacht sind, sondern aus Ideen. Wichtig hier ist noch, dass die Ideen nicht Elefanten oder Sprache oder Kultur als Thema haben; dies ist alles viel zu kompliziert, um axiomatische Beweise zu führen. Sondern die Einfachheit einer Aussage oder Argumentationskette ist das, was viele Mathematiker *Schönheit* nennen.

Nehmen wir an, wir zeichnen das folgende Rechteck auf einen Zettel:

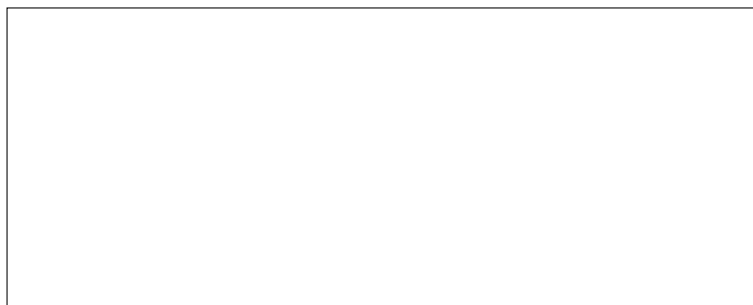


Abbildung 1: Ein Rechteck

Am Rande sei bemerkt, dass wir uns hier mit der Idee dieses Rechtecks beschäftigen, nicht mit diesem konkreten Rechteck gemacht aus Farbpigmenten auf einem Zettel oder Pixeln auf einem Monitor.

Es geht auch nicht um ein Metallrechteck. Das wäre alles nicht einfach genug: Ein echtes Rechteck besteht aus irgendeinem Material. Atome, die sich bewegen, es ändert ständig seine Größe je nach Umgebungstemperatur. Der Grund dafür ist Motivation Nummer 3: Wir wollen nur spielen! Mathematik bedeutet Neugierde,

Spiel und sich mit Objekten zu beschäftigen, die man sich selbst ausgedacht hat.

Wählen wir nun einen Punkt auf der oberen Kante. Einfach irgendeinen. Und verbinden ihn mit den beiden anderen Ecken, mit denen er noch nicht verbunden ist.

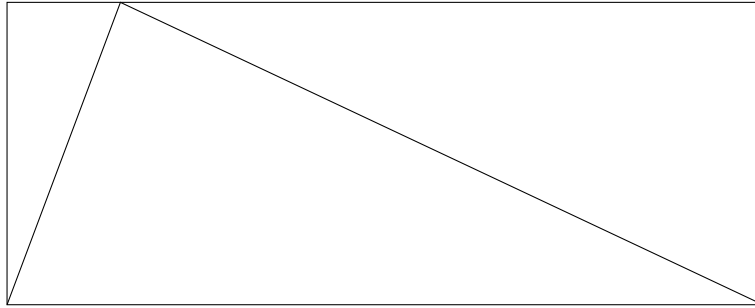


Abbildung 2: Ein wildes Dreieck erscheint

Selbst diese einfache Konfiguration von Strichen entwickelt nun ein Eigenleben. Es „spricht“ förmlich mit uns: Es gibt nun ein „Inneres“ und ein „Äußeres“. Eine sehr naheliegende Frage ist, wie sich diese beiden Flächen zueinander verhalten. Dieses Verhältnis herauszufinden, war nie Ziel. Es ist viel eher Wille des imaginären Dreiecks im imaginären Rechteck – ein Wille der Geometrie an sich.

Ich kann nicht kontrollieren, wie viel Platz das ist, ich kann es aber sehr wohl *herausfinden*. Vielleicht verbraucht es ca. $\frac{2}{3}$ des Platzes im Rechteck? Mehr? Weniger? Dieser Schritt des freien Äußerns von Gedanken wird oft vernachlässigt. Hier bildet man sich Meinungen und schätzt die Lage intuitiv ein. Die Schönheit besteht nun darin, dass die Chance besteht, seine eigenen Vermutungen absolut sicher zu bestätigen oder zu widerlegen.

Und genau in diesem Prozess kann echte Mathematik stattfinden: Was genau tut man nun? Dies ist der Teil, der viele Menschen an Mathematik begeistert, wenn sie von ihr als Rätsel begeistert sind: Es gibt keine feste Methode und keinen festen Algorithmus, das Flächenverhältnis zu bestimmen. Es handelt sich hier um einen sehr kreativen Prozess. Mit etwas Erfahrung in Mathematik mag man schnell auf die Idee kommen, ein Lot zu fällen:

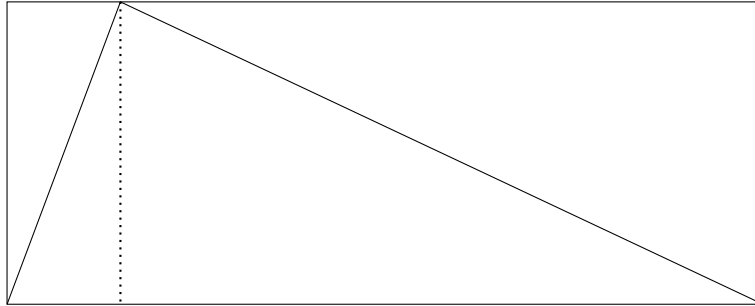


Abbildung 3: Ein Lot fällt

Vielleicht bemerkt man nun, dass dieses Lot das Rechteck in zwei Bereiche aufteilt: einen linken und einen rechten. Beide Bereiche werden jeweils von einer Kante des Dreiecks halbiert. Also halbiert das Dreieck das gesamte Rechteck. Die graue Fläche ist also genau so groß wie die nicht graue Fläche.

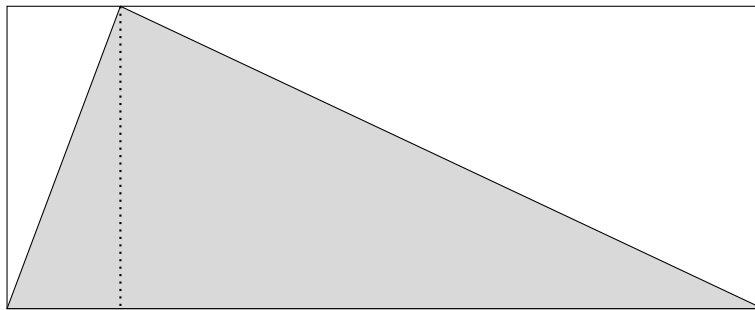


Abbildung 4: Innen vs. Außen

Um dieses Wissen besser abzuspeichern, verwendet man in der Mathematik häufig Buchstaben. Bezeichnen wir die untere Kante des Rechtecks mit g , das gefällte Lot mit h und die graue Fläche mit A :

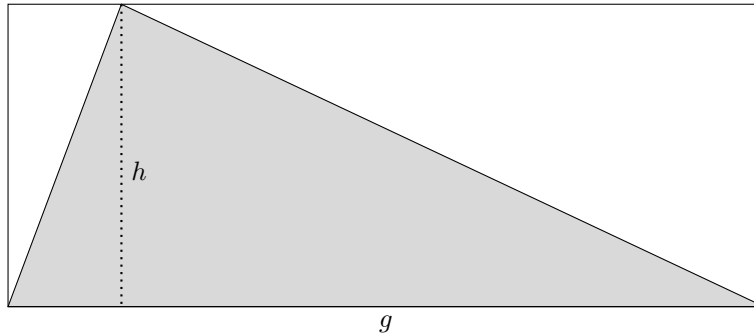


Abbildung 5: Dreieck im Rechteck mit Bezeichnungen

Die gerade gefundene Erkenntnis lässt sich wie folgt zusammenfassen: Die Fläche des Rechtecks beträgt $g \cdot h$. Die graue Fläche A ist halb so groß. Oder kürzer, in einer Formel:

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h.$$

Dies ist ein Beispiel für „echte“ Mathematik: Man stellt eine einfache Frage und findet auf elegante und verspielte Art und Weise eine Antwort. Und diese Antwort hat nun eine sehr tiefgehende und weitreichende Bedeutung: Wir haben eine Formel zur Berechnung der Fläche eines Dreiecks gefunden!

Am Rande sei bemerkt, dass diese Antwort nicht „vom Himmel“ gefallen ist. Wir haben sie selbst gefunden, was angeblich dabei hilft, sie sich besser zu merken. Wie genau haben wir diese Antwort gefunden? Warum haben wir das Lot gefällt? Warum macht ein Maler an einer bestimmten Stelle einen Strich? Durch Inspiration, Erfahrung, Glück, Probieren und Versagen.

Der Vollständigkeit halber hier ein Beispiel, wie der Flächensatz für Dreiecke sehr viel unverständlicher vermittelt werden kann:

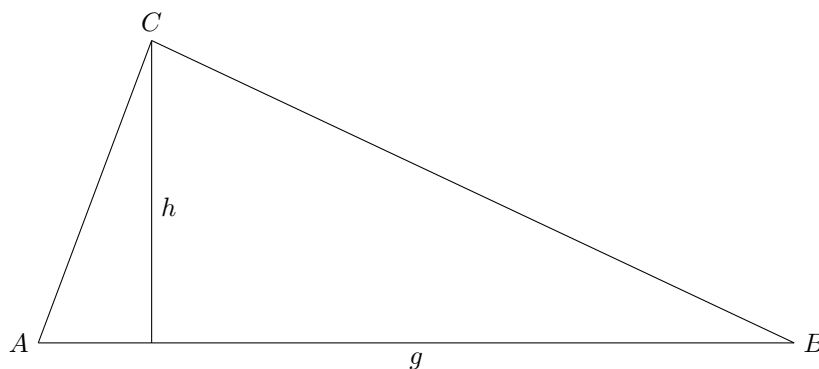


Abbildung 6: Dreieck ABC

Sei ABC ein Dreieck auf der Ebene mit Höhe h , Grundseite g und Flächeninhalt F . Dann gilt:

$$F = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h.$$

Darauffolgend findet man dann 20 Aufgaben mit gegebener Höhen- und Kantenlänge, in denen der Flächeninhalt des zugehörigen Dreiecks bestimmt werden soll. Eine Transferaufgabe ist dann, wenn die Fläche des Dreiecks und die Höhe gegeben ist und die Grundseite bestimmt werden soll. Hier passiert Abstraktion ohne Motivation. Eine Perversion der Mathematik.

Auswendiglernen hat seinen Platz. Technik hilft jedem Künstler, besser zu werden und vermeidet, das Rad neu zu erfinden. Allerdings ist Technik nicht alles. Bei *echter* Mathematik geht es nicht darum, wie man die Fläche eines Dreiecks ausrechnet. Es geht darum auf die Idee zu kommen, das Lot zu fällen. Den kreativen Prozess zu überspringen ist so, wie zu sagen, dass ein klassisches Musikstück wunderbar anzuhören ist, aber ohne es selbst zu spielen.

Wenn man von einem Musiklehrer gesagt bekommt, dass es bei Musik darum geht, Kreise auf Linien zu malen, weiß jeder, dass er falsch liegt. Dafür gibt es genügend Verständnis für Musik in der Gesellschaft. Dies ist anders bei Mathematik: Wahrscheinlich ist ein Teufelskreis zwischen Mathematikunterricht in der Schule und gesellschaftlichen Meinungen darüber, was Mathematik eigentlich ist, eine Ursache dafür, dass diese Pseudomathematik ihre eigene Kultur und Werte schafft, nach denen dann unterrichtet wird. In echter Mathematik geht es nicht um das Befolgen von Regeln, sondern um das Finden neuer.

2.3 Quadrat im Quadrat

Betrachten wir das folgende Quadrat in einem Quadrat:

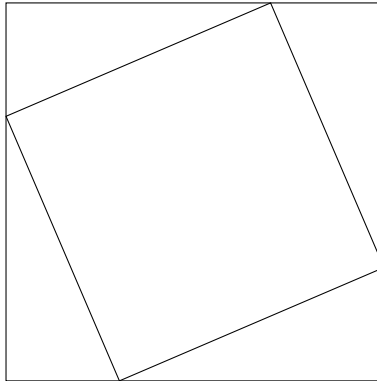


Abbildung 7: Ein Quadrat im Quadrat

Dabei sollen die Ecken des kleineren Quadrats die Kanten des größeren an allen vier Stellen im gleichen Verhältnis teilen. Wie eben entsteht plötzlich eine neue Struktur: Es werden vier Dreiecke sichtbar. Und – wie oben – stellt sich die Frage, wie sich die Flächeninhalte zueinander verhalten.

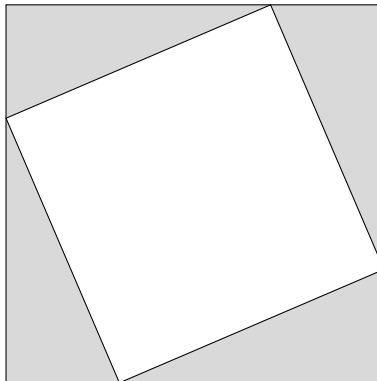


Abbildung 8: Vier Dreiecke

Nach etwas Überlegung kommt man vielleicht auf die Idee, das rechte Dreieck auf das obere zu „klappen“ und das untere auf das linke:

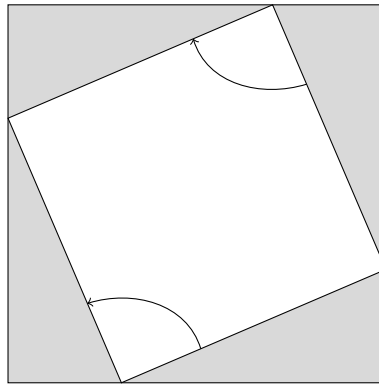


Abbildung 9: Der Inhalt der grauen Fläche bleibt gleich

Dabei entsteht nun folgende Form. Es sei bemerkt, dass sich keiner der Flächeninhalte verändert hat.

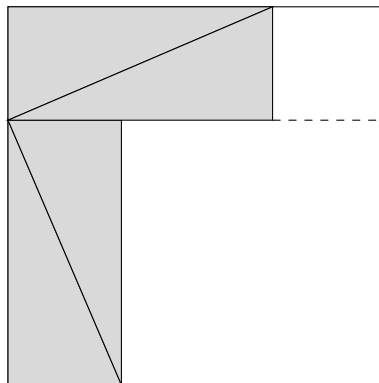


Abbildung 10: Situation nach dem „Umklappen“.

Es sind nun zwei neue Quadrate entstanden: ein kleines oben rechts und ein größeres unten rechts. Was wissen wir nun über die Flächenverhältnisse? Zur Übersicht sind hier noch einmal die anfängliche Situation und das Endstadium nebeneinander gelegt. Um einfacher über die Abbildungen schreiben zu können wurden einige Kanten benannt.

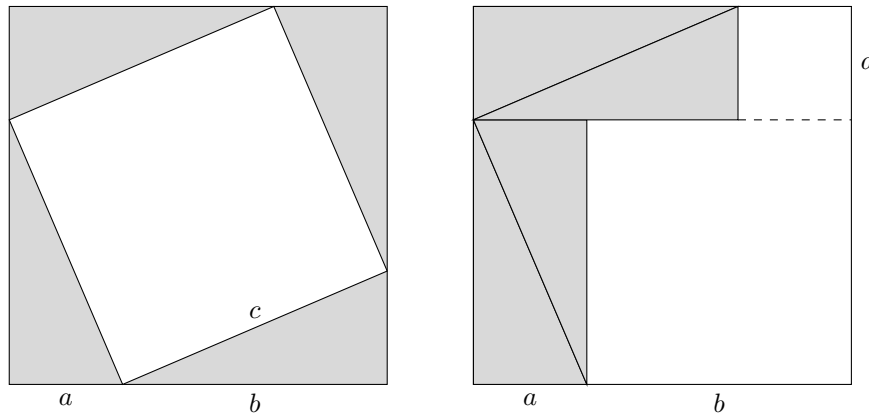


Abbildung 11: Vorher vs. Nachher

Im linken Bild kann man den Flächeninhalt der weißen Fläche einfach berechnen als c^2 . Im Rechten besteht die weiße Fläche aus zwei kleineren Quadraten. Das Kleine hat den Flächeninhalt a^2 und das größere den Flächeninhalt b^2 . Da – wie oben erwähnt – der Inhalt der weißen Fläche im linken Bild gleich dem Inhalt der weißen Fläche im rechten Bild ist, ergibt sich damit die berühmte Formel:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Dieser geometrische Beweis des Satzes von Pythagoras veranschaulicht eine weitere Eigenschaft echter Mathematik, die Menschen begeistert: das Erleben eines überraschenden „Eureka!“-Moments.

2.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden exemplarisch einige Beweisaufgaben vorgestellt. Sie dienen als Beispiele für relativ einfache, aber trotzdem *echte* Mathematik. Die dahinterliegende These ist, dass der menschliche Spieltrieb und der Drang, Rätsel zu lösen und Muster zu entdecken, die Abneigung gegen Mathematik kompensiert.

Vielen Menschen gegenüber erweckt Mathematik den Eindruck, dass es in ihr nur „Wahr oder Falsch“ gibt. Alles, was wahr ist, ist Gesetz und daran darf nicht gezweifelt werden. Dabei ist gerade das kritische Auseinandersetzen mit

der Mathematik einer der spannendsten Aspekte: Ist das Argument korrekt? Ergibt es Sinn? Ist es einfach und elegant? Bringt es mir Erkenntnis und mich näher zum Ziel?

Fragestellungen wie: „Gegeben sind die Summe und die Differenz zweier Zahlen. Was sind die Zahlen?“ sind in sich schon so einfach und schön, dass es für einige keiner weiteren Motivation bedarf. Wie lang ist die Diagonale eines Würfels? Gibt es unendlich viele Primzahlen? Ist unendlich eine Zahl? Auf wie viele Arten kann man eine Fläche symmetrisch unterteilen? Eine gute Fragestellung zeichnet sich dadurch aus, dass es noch kein bekanntes Verfahren gibt, um sich ihr zu nähern und sie zu beantworten.

3 Memes, Hypes und Trends

In diesem Kapitel geht es darum, die Menschen anzusprechen, die extrinsisch von Mathematik begeistert sind. Also durch externe Faktoren, wie Anerkennung durch Andere oder bessere Aussichten in der Arbeitswelt. Auch wenn diese Quelle an Begeisterung weniger „moralisch wertvoll“ ist als die anderen, sollte sie nicht außen vor gelassen werden. Ich schlage allerdings dringend vor, sie mit Bedacht und eher als Starthilfe zu verwenden. Es besteht die Gefahr, dass Belohnung durch soziale Anerkennung habituiert und damit als Motivation plötzlich wegfällt. Weiterhin besteht als Leiter einer Gruppe natürlich die offensichtliche Gefahr, sich lächerlich zu machen, wenn man versucht *cool* zu sein und einfach keine Ahnung hat⁵.

3.1 Trivia / Fun-Facts / Click Baits

In meiner Erfahrung hat es sich als sehr erfolgreich herausgestellt, unwichtige Seiteninformationen zu mathematischen Inhalten zu sammeln und in Unterrichtseinheiten einzustreuen. Beispiele:

- War Gödel beliebt oder nicht? Warum?
- Drogen Miss- und Gebrauch durch Paul Erdős.
- Die mysteriöse Hintergrundgeschichte von Alexander Grothendieck.
- Was ist das Heiratsproblem?

3.2 In-Group Sprache

Jede junge Generation entwickelt ihre eigenen Worte oder Phrasen. Wahrscheinlich, um sich von der bestehenden und etablierten Generation abzugrenzen. Diese Sprache nachzuahmen ist ein Garant dafür, sich lächerlich zu machen. In dieser Sektion geht es viel mehr darum, mit einer Gruppe eine eigene Sprache zu entwickeln und zu sprechen. Sie sollte explizit nichts mit der gesprochenen Jugendsprache zu tun haben⁶.

Diagonalisatoren. (Bonus: „und -innen“) Wenn es sich auf natürliche Art ergibt, kann es nutzen, der Gruppe, mit der man arbeitet, einen Namen zu geben. Dies sorgt für das Gefühl, zu etwas Größerem zu gehören.

Geheimnisse. sind immer gut. Gelegentlich etwas als Geheimnis zu vermarkten, weckt Interesse.

⁵Selbstironie kann helfen – liegt aber natürlich nicht jedem gleich gut

⁶selbstironische Äußerungen außen vor gelassen, natürlich.

Ninja-Regel. zur Matrixmultiplikation. Merksätze mit Bewegungen zu verbinden, spricht kinästhetische Lerntypen besser an.

Dies alles kann helfen, Teilnehmern das Gefühl zu geben, einer Gruppe anzugehören. Gruppenzugehörigkeit erfüllt eine Vielzahl menschlicher Bedürfnisse.

3.3 DorFuchs

Der YouTube Kanal <https://www.youtube.com/user/DorFuchs> erlangte in der ersten Hälfte der 2010er Jahre unerwartete Berühmtheit in Deutschland. Auf diesem Kanal veröffentlicht der Musiker *DorFuchs*⁷ verschiedene allgemeinverständliche Lieder zu relativ komplexen mathematischen Themen. Häufig inklusive Beweis.

Für uns spielt dies eine Rolle, da diese Erscheinung zu ihrer Zeit einen sehr bemerkbaren Effekt in der gesamten Popkultur hatte. Johann Beurich hatte im Laufe der Jahre mehrere Fernsehauftritte, z.B. bei TV Total, Galileo⁸ oder der NDR Sendung „Kaum zu Glauben!“⁹. Das Thema DorFuchs kam in vielen Schulklassen auf und wurde von findigen Kursleitern genutzt. Warum DorFuchs so erfolgreich war hat wahrscheinlich vielerlei Gründe. Wahrscheinlich handelt es sich aber um eine Mischung aus Anerkennung und Fremdscham.

3.4 Memes und Katzen

Katzen sind sehr erfolgreich im Internet. Auch dies hat wahrscheinlich eine Vielzahl von Gründen, deren Erkundung den Rahmen dieser Schulung sprengt. Es folgt eine (sehr unvollständige) Liste von Internetphänomenen, die Katzen involvieren:

Grumpy Cat. Tardar Sauce ist eine weibliche Katze, die durch ihren mürrischen Gesichtsausdruck Bekanntheit erlangte und sich dadurch auch zum Internetphänomen entwickelte. Sie gehört der Amerikanerin Tabatha Bundesen. Grumpy Cat leidet an genetisch bedingtem felinem Kleinwuchs, der ihren Gesichtsausdruck erklärt. Grumpy Cat ist seit 2013 eine eigene Marke.[Gru18]

Lolcat. Lolcat ist ein Internet-Phänomen in Form humoristischer Bilder. Dargestellt werden Fotos von Katzen, denen passende, orthographisch, interpunktorisch und grammatikalisch inkorrekte Worte in den Mund gelegt werden.[Lol18]

⁷bürgerlicher Name: Johann Beurich

⁸[Beu]

⁹[NDR]

Keyboard Cat. Keyboard Cat ist der Titel eines Videos und gilt als ein Internet-Meme.[Key18]

Nyan Cat. Nyan Cat (wörtlich: „Miau-Miau-Katze“), auch bekannt unter der Bezeichnung Pop-Tart Cat oder Regenbogen-Katze (rainbow-cat), ist ein Internetphänomen und Teil der Netzkultur. Es bezeichnet eine aus 12 Frames bestehende 8-Bit-GIF-Animation einer fliegenden Katze mit einem Körper, der aus einem Kirsch-Pop-Tart besteht, und welche einen Regenbogen hinter sich lässt, wobei im Hintergrund ein Remix des Songs „Nyanyanyanyanyanyan!“ gespielt wird.[Nya18]

Katzenbilder – und Memes im Allgemeinen – lockern Einheiten auf. Weiterhin kann man mit ihrer Verwendung beispielsweise jüngeren Teilnehmern signalisieren, dass man ihre Kultur und Erlebnisswelt ernst nimmt und sich mit ihr beschäftigt. Wie immer ist hier natürlich darauf zu achten, trotzdem die nötige Distanz zu wahren. Ein völlig falsch verwendetes Meme verursacht mehr Schaden, als es nutzt (s. Abb. 12)¹⁰.



Abbildung 12: Nach einem erfolgreichen Cyber-Angriff verwendete die ukrainische Botschaft das „Everything is Fine“-Meme

¹⁰wenn es nicht ironisch eingesetzt wird

3.5 Bei Facebook Freunden glänzen

In unregelmäßigen Abständen machen Bilder wie das folgende die Runde auf Facebook.

$$\begin{array}{rclcl} \text{Apple} & + & \text{Apple} & + & \text{Apple} & = & 30 \\ \text{Apple} & + & \text{Banana} & + & \text{Banana} & = & 18 \\ \text{Banana} & - & \text{Orange} & = & 2 \\ \text{Orange} & + & \text{Apple} & + & \text{Banana} & = & ?? \end{array}$$

Abbildung 13: Beispiel für ein viral gewordenes Mathe-Rätsel auf Facebook

Einfache Termumformung und gelegentlich der Gauß-Algorithmus lösen fast alle diese Aufgaben und lassen sich so motivieren.

3.6 Hollywood: Das Good Will Hunting Problem

Der Film „Good Will Hunting“ ist im Jahr 1997 erschienen. Entgegen dem Trend, dass Hollywood-Filme die Mathematik sehr irreführend darstellen, ist sie innerhalb von Good Will Hunting völlig korrekt und ergibt weitestgehend Sinn¹¹.

Der Hauptcharakter Will Hunting, gespielt von Matt Damon, kommt aus einer schlechten Gegend und ist ein Mathematikgenie. Will ist Reinigungskraft am Massachusetts Institute of Technology (MIT) in Cambridge und löst heimlich und völlig mühelos Aufgaben, die an Tafeln in Fluren geschrieben wurden und eigentlich für die Studenten gedacht sind. Nachdem er anonym solch eine Lösung an die Tafel schreibt, nimmt die Fakultät die Herausforderung an und stellt ein

¹¹Der Mathematiker Daniel Kleitman war beratend tätig[AMM]

Problem, dass eine Gruppe von Mathematikprofessoren und Postdocs zwei Jahre beschäftigt haben soll:

Draw all homeomorphically irreducible trees of size $n = 10$.

Frei übersetzt ins Deutsche entspricht dies:

Zeichnen Sie alle irreduziblen Bäume der Größe $n = 10$ bis auf Homöomorphie.

Das wahrscheinlich Schwierigste ist, die sehr dichte Sprache aufzulockern und alle Definitionen zu kennen. Dazu ist ein kleiner Ausflug in die sogenannte Graphentheorie notwendig. Im Rahmen dieses Ausfluges sollen die folgenden Definitionen geklärt werden:

Baum Hiermit sind ungerichtete zusammenhängende Graphen gemeint (Punkte und Kanten in der Ebene, nicht Funktionsgraph), die keinen Kreis enthalten.

Größe $n = 10$ Wir betrachten ausschließlich Graphen mit 10 Knoten. n bezeichnet im Kontext der Graphentheorie häufig die Anzahl der Knoten.

irreduzibel Dies bedeutet, dass es keinen Knoten vom Grad 2 (also mit genau zwei Kanten) gibt.

Homöomorphie Dieses Wort wurde wahrscheinlich aus dramaturgischen Gründen eingefügt: Bei Graphen interessiert man sich selten für die konkrete Lage der Punkte auf der Ebene. Diese soll hier ausgeschlossen werden.

Eine implizite Voraussetzung im Film ist, dass der Graph *einfach* und *schleifenfrei* ist:

einfach Zwei Knoten sind höchstens mit einer Kante verbunden oder – äquivalent – der Graph enthält keine parallelen Kanten.

schleifenfrei Ein Knoten ist niemals zu sich selbst verbunden.

Wir zeichnen also zehn Punkte auf ein Blatt und verbinden diese so lange, bis ein Kreis entsteht. Diesen Prozess wiederholen wir ein paar Mal.

An dieser Stelle kann man übrigens abzweigen und sich überlegen, wie oft dies möglich ist, und ob es überhaupt nach einer endlichen Anzahl von Schritten möglich ist. Wenn ja, wie viele Schritte? Das Ergebnis dieser Überlegung ist in Fakt 3.1 zusammengefasst.

Fakt 3.1. *Die Anzahl der Kanten in einem Baum mit n Knoten ist $n - 1$.*

Beweis. Der Beweis verwendet Induktion nach n : Ein schleifenfreier Graph mit nur einem Knoten hat keine Kante. Für $n = 1$ ist der Induktionsanfang also bewiesen.

Nehmen wir nun an, dass jeder Baum mit n Knoten genau $n - 1$ Kanten hat, und zeigen, dass dies auch für einen Baum T mit $n + 1$ Knoten gelten muss. Es muss in T mind. ein Blatt geben – einen Knoten b mit Grad 1. Hätte T so einen Knoten nicht, enthielte T einen Kreis. Nach dem Entfernen von v aus T ist das Resultat immer noch ein Baum – nur mit einem Knoten weniger als T , also n . Für diesen Baum gilt nach Induktionsvoraussetzung, dass er $n - 1$ Kanten hat. Da wir nur einen Knoten und eine Kante entfernt haben, hat T gerade $(n - 1) + 1 = n$ Kanten. $\square$

Nach etwas Rumprobieren erreicht man vielleicht eine ähnliche Situation, wie Abb. 14 zeigt. Dies ist natürlich noch kein Beweis. Aber ein sehr wichtiger Schritt, um ein Gefühl für die Situation zu bekommen. Um das Problem zu „meinem eigenen“ zu machen.

Kommen wir nun zu einer formaleren Argumentation, die nach obigen Überlegungen nicht weit hergeholt ist: Sei k eine natürliche Zahl und n_k die Anzahl der Knoten von Grad k . Da der Graph irreduzibel vorausgesetzt war, gilt $n_2 = 0$. Da weiterhin ein Knoten mit mehr als 9 Nachbarn dafür sorgen würde, dass der Graph mehr als 10 Knoten hat, gilt $n_k = 0$ für $k > 9$. Damit folgt die folgende Gleichung für die Zahlen n_k :

$$n_1 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8 + n_9 = 10.$$

Nach Theorem 3.1 hat unser Baum mit 10 Knoten genau 9 Kanten. Zählt man jede Kante doppelt erhält man:

$$n_1 + 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + 6n_6 + 7n_7 + 8n_8 + 9n_9 = 18.$$

Subtrahiert man die letzten beiden Gleichungen voneinander erhält man:

$$2n_3 + 3n_4 + 4n_5 + 5n_6 + 6n_7 + 7n_8 + 8n_9 = 8.$$

Sei nun r das höchste k , sodass $n_k \neq 0$ gilt. Der Rest ist eine Fallunterscheidung nach allen möglichen Werten von r :

- $r = 9$: n_9 muss kleiner als 2 sein, also gilt $n_9 = 1$. Damit folgt $n_1 = 9$, was dem letzten Bild in Abb. 14 entspricht.
- $r = 8$: ist nicht möglich.
- $r = 7$: n_7 muss auch kleiner als 2 sein, also $n_7 = 1$. Dies impliziert $n_3 = 1$, was dem ersten Bild in Abb. 14 entspricht.

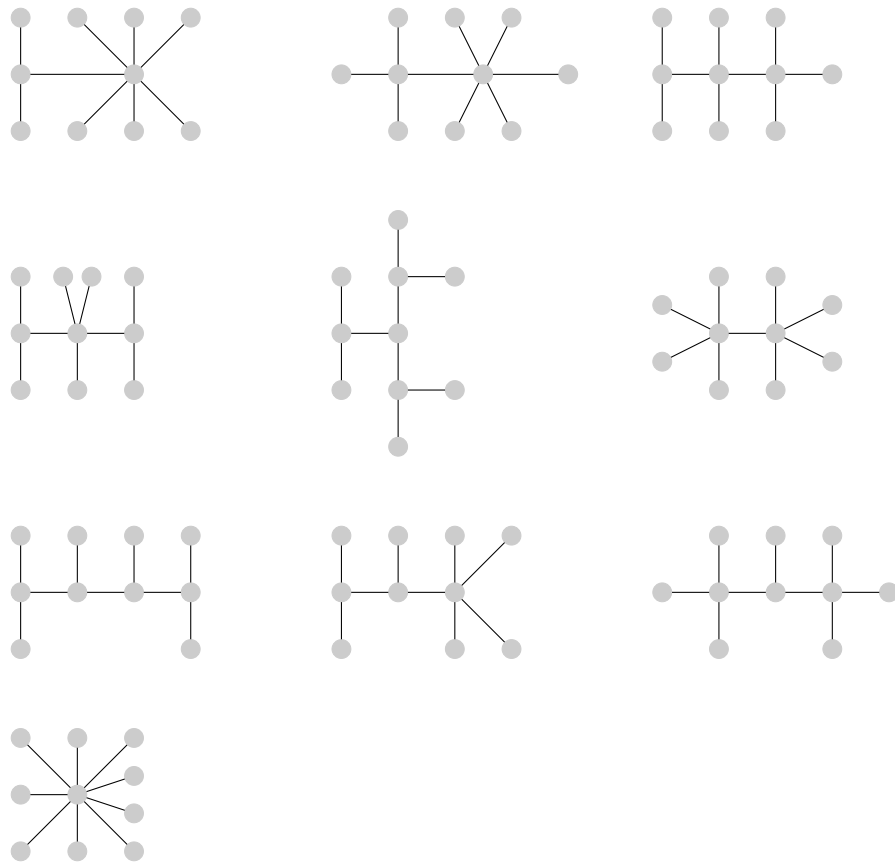


Abbildung 14: Bäume der Größe $n = 10$.

- $r = 6$: Auch hier gilt $n_6 = 1$, was $n_4 = 1$ impliziert. Dies entspricht dem zweiten Bild in Abb. 14.
- $r = 5$: Hier kann n_5 die Werte 2 und 1 annehmen. $n_5 = 2$ impliziert $n_1 = 8$, was dem sechsten Bild in Abb. 14 entspricht. $n_5 = 1$ impliziert $n_3 = 2$, was dem vierten Bild entspricht.
- $r = 4$: Da $n_4 = 1$ nicht möglich ist – $2n_3$ ist nämlich immer gerade – gilt $n_4 = 2$. Dies impliziert $n_3 = 1$, was entweder Bild 2 oder 9 in Abb. 14 entspricht.
- $r = 3$: Dies impliziert sofort $n_3 = 4$ und entspricht Bild 5 und Bild 7 in Abb. 14.

Dies schließt den Beweis ab, dass Abb. 14 wirklich alle Fälle abdeckt.

3.7 YouTube: Numberphile

Dies ist ein YouTube-Kanal mit der folgenden Beschreibung:

Videos about numbers - it's that simple. Videos by Brady Haran

Die meisten Videos bestehen aus einem Interview mit einem berühmten Mathematiker. In diesem Video wird irgendein (teilweise fortgeschrittenes) Thema aus der Mathematik thematisiert und sehr allgemeinverständlich aufbereitet. Geheintipp, wenn man ein Thema sucht: Einige dieser Videos ansehen und das beste in eine Unterrichtseinheit umwandeln.

3.8 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden verschiedene Referenzen auf die Mathematik im Rahmen der Pop-Kultur umrissen. Hintergrund dazu ist, dass solch ein Bezug als Nachweis verstanden werden kann, dass Mathematik auch in diesem Rahmen auftritt. Ist jemand aufgrund der einhergehenden sozialen Anerkennung für Mathematik begeistert, kann Wissen über Pop-Kultur beim Entwurf von Unterrichtseinheiten sehr wertvoll sein.

4 Mathematik als Rätsel

In diesem Kapitel sollen verschiedene Themen vorgestellt werden, die Mathematik in ihrer Rolle als größtes Rätsel der Welt beleuchten. Einige davon sind besonders „hübsch“, andere überraschend tiefgehend.

4.1 Was ist $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$?

Gibt es zwei irrationale Zahlen a und b , sodass a^b wieder rational ist?

Betrachten wir die Zahl $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Ist diese Zahl rational oder irrational? Wenn sie rational ist, haben wir unser Ziel erreicht. Denn – auch wenn es den meisten zwar egal ist (Abschnitt 3.3) – ist $\sqrt{2}$ irrational und wir hätten ein Paar (a, b) gefunden, für das a^b rational ist, nämlich $a = b = \sqrt{2}$.

Für den anderen Fall, nämlich, dass $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ irrational ist, kann man es einfach mit $\sqrt{2}$ potenzieren und erhält eine rationale Zahl:

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

Damit ist die Zahl a^b für $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ und $b = \sqrt{2}$ – was nach Voraussetzung beides irrational ist – wieder rational.

Die Schönheit dieses Beweises besteht darin, dass er nicht-konstruktiv ist: Nachdem man ihn abgeschlossen hat, kennt man immer noch kein Paar irrationaler Zahlen (a, b) , für das a^b rational ist (nur zwei Kandidaten, von denen es mind. einer sein muss).

4.2 Punkte zählen und Kopfrechnen

Auch wenn Rechnen nicht viel mit Mathematik zu tun hat, genießen es einige Menschen trotzdem als Zeitvertreib. Rechentricks können also auch begeistern. Als Hintergrund wollen wir uns zuerst darüber unterhalten, welche Methoden es gibt, Punkte zu zählen:



Abbildung 15: Punkte

Wie viele Punkte sind in Abb. 15 zu sehen? Wie viele Methoden gibt es, diese zu zählen? Sehr ähnlich verhält es sich mit dem Lösen von Rechenaufgaben. Es gibt häufig sehr viel mehr als nur eine Methode. Und es ist meist sogar strittig, ob es ein „beste“ Methode gibt.

Nehmen wir beispielsweise die Aufgabe

$$43^2$$

- Die naheliegendste Herangehensweise ist, die Zahl 43 einfach mit sich selbst zu multiplizieren. Hier muss man natürlich auf den Übertrag achten. Die Wahrscheinlichkeit, sich zu verrechnen ist hier vielleicht am höchsten.
- Eine andere Methode ist, die Zahl in die Summe $40 + 3$ aufzuteilen, die Zahlen 40 und 3 einzeln zu quadrieren und dann noch den „binomischen Korrekturterm $2 \cdot 40 \cdot 3$ zu addieren. Also $1600 + 9 + 240 = 1849$. Warum funktioniert dieser Trick?
- Noch eine Methode ist, eine beliebige Zahl n von der zu quadrierenden Zahl abzuziehen und zu addieren. Die beiden Ergebnisse werden dann multipliziert und anschließend n^2 addiert. Nun sollte man n natürlich so wählen, dass alle Rechnungen einfach werden. In diesem Beispiel also z.B. $n = 3$. Damit rechnet man $40 \cdot 46 = 1840$ – was relativ einfach ist – und $n^2 = 9$. Die Summe von beidem ist wieder 1849. Warum funktioniert dieser Trick?

Einfache Recherchen im Internet liefert eine Vielzahl ähnlicher Techniken.

4.3 Knotentheorie

Die Knotentheorie ist ein sehr dankbares und anschauliches Thema. Es kann außerdem mit verhältnismäßig einfachen Methoden sehr tiefes Verständnis erreicht werden. So ist es beispielsweise möglich, nur mit Anschauung und etwas Termmanipulation das sogenannte Jones-Polynom herzuleiten und vollständig zu beweisen, dass es eine topologische Invariante ist. Für Details sei auf das gesonderte Skript zu diesem Thema verwiesen.

4.4 Bis zur Unendlichkeit und noch viel weiter!

Ohne viel Vorwissen kann *Unendlichkeit* thematisiert werden. Dies ist besonders geeignet, weil es den Begriff der *Unendlichkeit* bespricht, der die Menschheit schon seit Urzeiten beschäftigt und mit einer gewissen Mystik umgeben ist. Bei Einheiten zu diesem Thema soll es vor allem darum gehen, diesen Begriff greifbarer zu machen und mit der Strenge zu behandeln und zu definieren, die der Mathematik nachgesagt wird.

Ein Skript zu diesem Thema ist noch in Arbeit, inhaltlich könnte eine solche Einheit wie folgt aussehen:

- Was ist das Hilbert-Hotel?
- Definition des Begriffs *Mächtigkeit* und insbesondere der *Gleichmächtigkeit*.
- Eine unendliche Menge ist definiert als eine Menge, die gleichmächtig zu einer echten Teilmenge ist.
- Überraschendes Resultat: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind gleichmächtig. Ebenso die Menge aller Polynome und damit auch aller algebraischen Zahlen.
- Sind alle unendlichen Mengen gleichmächtig zueinander? $\mathbb{R}$ als Gegenbeispiel und Definition der Potenzmenge als allgemeines Gegenbeispiel.

4.5 Chaos und die Mandelbrotmenge

Der Begriff *Chaos* spricht viele Menschen an, schon alleine wegen seiner Bedeutung im Alltag. Manch einer mag Chaos sogar als etwas Erstrebenswertes empfinden oder darstellen. Mathematisch kann der Begriff ebenfalls definiert werden, und er bringt einen auf eine abwechslungsreiche Reise durch Themen wie komplexe Zahlen, Computervisualisierung und Beobachtungen in der echten Welt.

Ein Skript zu diesem Thema ist noch in Arbeit, inhaltlich könnte eine solche Einheit wie folgt aussehen:

- Motivation des Begriffs Chaos über Beobachtungen (ein Luftballon landet niemals an der gleichen Stelle).
- Definition von komplexen Zahlen als „verrückte“ Bruchrechnung.
- Einführung der komplexen Zahlenfolge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$z_0 = 0 \quad \text{und} \\ z_{n+1} = z_n^2 + c.$$

- Visualisierung durch ein Computersystem.

4.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden einige Themen vorgestellt, die die Schönheit der Mathematik unterstreichen sollen und Inspiration dafür geben, was (auch ohne komplexes mathematisches Vorwissen) möglich ist.

5 Magie (Anwendungen)

5.1 Anwendung, Schwanwendung?

Meiner Erfahrung nach gibt es in der Schule drei Klassen von Anwendungen in der Mathematik:

1. *Innermathematische Anwendungen.* Ein Beispiel dafür ist z.B. die p - q -Formel, die auswendig gelernt wird, damit quadratische Gleichungen gelöst werden können. Weitere Beispiele sind das schriftliche Addieren und Dividieren, Termumformungen und die Kurvendiskussion. All dies findet sehr viel Anwendung innerhalb der Mathematik, die man aber sonst „nie wieder im Leben“ gebrauchen kann. Entsprechend schnell werden diese Dinge wieder vergessen.
2. *Naive Anwendungen.* Man kann argumentieren, dass schriftliches Addieren und Dividieren keine innermathematische Anwendung ist, weil es ja nötig ist, um z.B. in einem Restaurant nachrechnen zu können, ob die Registrierkasse alle Posten korrekt zusammengerechnet hat. Dreisatz ist eine ähnliche „Anwendung“: Hat man beispielsweise ein Rezept für zwei Personen, möchte es aber für drei Personen zubereiten. Meiner Meinung nach geht es hier nicht um Mathematik, sondern um *Rechnen*. Außerdem trägt heutzutage jeder ein Gerät bei sich, um auf den größten und besten Rechner zuzugreifen, den die Menschheit je gebaut hat.
3. *Pseudoanwendungen.* Hier berechnet man beispielsweise den Verlauf einer Froschpopulation mit vier verschiedenen Stadien mithilfe einer Übergangsmatrix. Jeder Biologe wird bestätigen, dass die Situation sehr viel komplexer ist.

Weitere Kandidaten für solch eine Pseudoanwendungen sind Altersrätsel. Ich denke nicht, dass viele Menschen in die Situation kommen, das Alter von Maria zu bestimmen, wenn sie nur wissen, dass sie zwei Jahre älter ist als das doppelte ihres Alters vor sieben Jahren.

Zu berechnen, wie lange ein Kredit für ein Haus benötigt, um vollständig getilgt zu sein, interessiert die wenigsten Unterrichtsteilnehmer in der Schule.

Sobald Mathematik *wirklich* einen Einfluss auf die physische Welt hat, ist sie extrem kompliziert. Wahrscheinlich viel zu kompliziert, um sie nebenher im Unterricht zu erwähnen – vielleicht sogar zu kompliziert, um sie in der Schule überhaupt zu thematisieren. Und Motivation 4 wird ausschließlich von solch einer *echten* Anwendung verursacht. Weiterhin wird die Motivation stark durch die *überraschende* Anwendung getrieben – eine Art „Eureka!“-Moment, wenn alles plötzlich Sinn ergibt und seinen Platz einnimmt.

5.2 Treppe bauen

Es ist sehr empfehlenswert, echte Beispiele aus dem echten Leben zu verwenden. Authentizität wirkt [\[citation needed\]](#). Ich hatte beispielsweise einen solchen „Eureka!“-Moment beim Bau einer Treppe. Es gab eine – relativ steile – Treppe zum Dachboden. Dort sollte eine weniger steile Treppe angebracht werden und ich entschied mich dafür, sie selbst zu bauen.

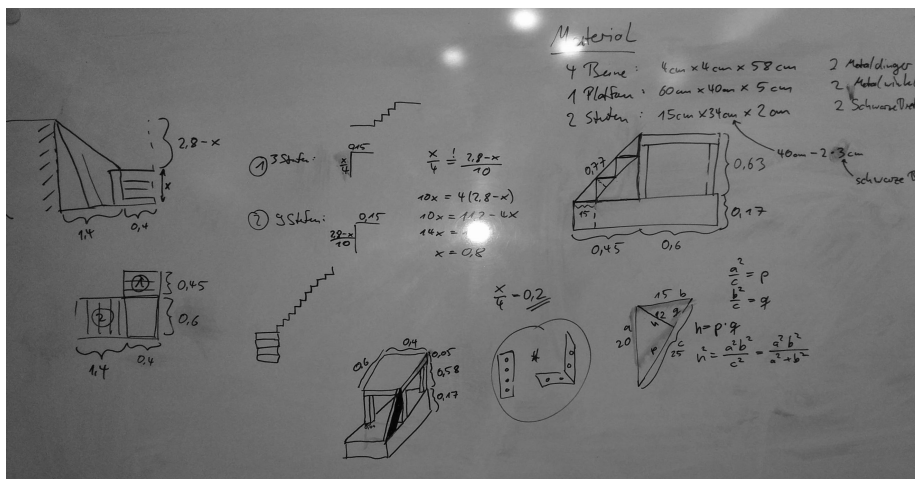


Abbildung 16: Plan für eine Treppe

Überraschenderweise war sowohl der Satz des Thales als auch ein Satz darüber, wie die Höhe eines Dreiecks die Grundseite teilt, notwendig.

Abb. 18 zeigt ein Seitenelement der Treppe. Es soll auf einem Plateau aufliegen. Der dafür nötige Ausschnitt hat die Form eines rechtwinkligen Dreiecks. Der Satz des Thales stellt hier sicher, dass dieses Dreieck wirklich rechtwinklig ist, wenn man es derart ausschneidet, dass der Eckpunkt auf einem Halbkreis liegt.



Abbildung 17: Seitenelement liegt auf Plateau auf

Der nicht-triviale Satz zu Höhen in rechtwinkligen Dreiecken taucht plötzlich auf, wenn man ausrechnen will, wie breit das Seitenteil sein muss, wenn man schon weiß, wie breit und hoch eine einzelne Stufe sein soll.

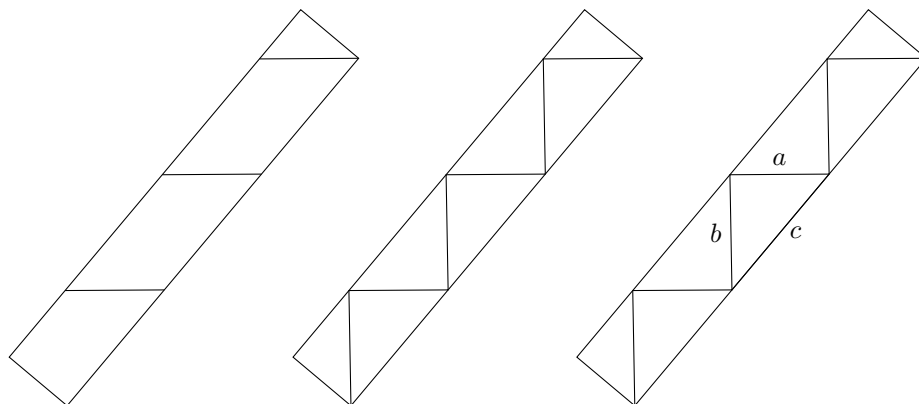


Abbildung 18: Treppenstufen

In Abb. 19 ist eine einzelne Stufe schematisch dargestellt.

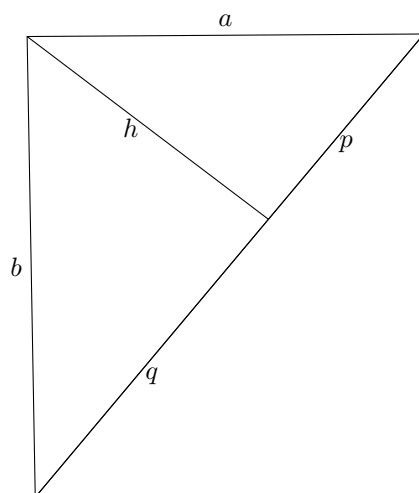


Abbildung 19: Schematische Darstellung einer einzelnen Stufe

Da sowohl die Höhe der Stufe als auch die Breite bekannt sind, ist nun die Frage, wie breit das Seitenbrett sein muss. Die Höhe der Stufe entspricht b , die Breite der Stufe a und die Breite des Seitenbrettes h . In diesem Dreieck gelten die folgenden Aussagen:

Theorem 5.1. *Beträgt der Winkel zwischen den Seiten a und b im Dreieck aus Abb. 19 genau 90° , so gilt:*

$$a^2 = p^2 \cdot c$$

$$b^2 = q^2 \cdot c$$

$$h = p \cdot q.$$

5.3 Bitcoin und andere Kryptowährungen

Aktuell sind *Bitcoin* ein sehr heißes Thema. Und in der allgemeinen Öffentlichkeit ist auch angekommen, dass Mathematik eine wichtige Voraussetzung dafür ist, zu verstehen, wie Bitcoin (oder allgemein *Blockchains* oder andere *Kryptowährungen*) funktionieren. Dieses Thema habe ich ausgewählt, weil es aktuell eines der wenigen Beispiele für einen Anwendungsfall ist, der gerade komplex genug ist, um nicht als billige Vereinfachung entlarvt zu werden, aber noch nicht zu komplex, um den Umfang einer Unterrichtseinheit oder -reihe zu sprengen.

Was ist Bitcoin? Ziehen wir mal wieder Wikipedia zu Rate:

Bitcoin (englisch sinngemäß für „digitale Münze“) ist ein digitales Zahlungsmittel (sog. Kryptowährung), gleichzeitig auch der Name des weltweit verwendbaren dezentralen Buchungssystems sowie die vereinfachende Bezeichnung einer kryptografisch legitimierten Zuordnung von Arbeits- oder Rechenaufwand[Bit18].

Es gibt viele Aspekte von Bitcoin, die mathematisch sehr interessant sind, darunter das Erstellen von digitalen Signaturen über sog. *elliptische Kurven* und das Validieren der Blockchain durch sog. *kryptographische Hash-Funktionen*. Wir wollen uns hier auf das zweite Thema konzentrieren.

5.3.1 Hash-Funktionen

Definition 5.2. Eine *Hash-Funktion* bezeichnet eine beschränkte Funktion, die eine endliche Folge von Zeichen aus einem Alphabet (z.B. aus dem binären Alphabet $\{0,1\}$) auf eine Zahl abbildet. Da der Zielbereich zwar beschränkt ist, aber ggf. trotzdem relativ große Zahlen enthält, stellt man diese häufig der Übersichtlichkeit zuliebe im hexadezimalen System dar¹².

Definition 5.3. Solch eine Hash-Funktion h bezeichnet man als *kryptografisch sicher* oder einfach nur *kryptografisch*, wenn sie die folgenden beiden Eigenschaften besitzt:

¹²an dieser Stelle kann eine kurze Übung nicht schaden, die Teilnehmern klar macht, dass hexadezimale dargestellte Zahlen auch einfach nur Zahlen sind.

1. Einwegfunktion: „Gegeben y im Wertebereich, finde x mit $h(x) = y$ “ ist *praktisch schwer*.
2. Kollisionsresistenz: „Finde x und x' mit $h(x) = h(x')$ “ ist *praktisch schwer*.

Natürlich ist die obige Definition keine echte Definition im mathematischen Sinne. Dies ist der Tatsache geschuldet, dass dieses Thema eben doch relativ komplex ist. Um zumindest etwas Sicherheit über die Bedeutung zu haben, nehmen wir einfach an, dass „praktisch schwer“ bedeutet, dass bisher kein Algorithmus bekannt ist, der so schnell wäre, dass alle Computer der Welt zusammen bis zum Erlöschen der Sonne zu einem Ergebnis kämen.

Ein Beispiel für solch eine Hash-Funktion ist *SHA-256*. Sie bildet eine beliebige Menge von Daten auf eine Zahl zwischen 0 und 2^{256} ab¹³. Auch wenn die Werte dieser Funktion sehr groß sein können, sind sie doch alle unter 2^{256} . Dies hat einige sehr nützliche Konsequenzen, die wir gleich besprechen werden. Die genaue Definition von SHA-256 ist sehr langweilig. Es kommen sehr viele magische Konstanten und sowohl arithmetische als auch bit-shifting Operationen vor. Im Folgenden wollen wir sie als Blackbox verwenden.

Die Vermutung, dass die Funktion kryptografisch ist, konnte bisher nicht widerlegt werden und fände man z.B. eine Umkehrfunktion, hätte dies extreme Konsequenzen für die Sicherheit vieler IT-Systeme der Welt. Diese Fakten herauszustellen, ist zentral, wenn man Teilnehmer ansprechen möchte, die Mathematik in der Anwendung beeindruckend finden und, die dadurch motiviert und zu begeistern sind.

Beispiel 5.4. Zeichenketten, wie z.B. **Begeisterung** lassen sich im Computer über sogenannte Zeichensätze in Bitfolgen umwandeln, die dann wiederum in die SHA-256-Funktion eingesetzt werden können. Hier einige Beispiele für Daten und ihren SHA-256-Wert:

```

SHA256 (1234) =
f104a7857c7951992ba8fb4de16bd6b95695fd85321570b177fdd1bdf7070ae9
SHA256 (Begeisterung) =
7cba630f2e1c1bf1a846daa04fdbb87859e451bb6a476f5bbabe330341bea133
SHA256 (begeisterung) =
4466f5a2a737d1272070a91de8e70464793744b2836fa533727e6825dcc7902d
SHA256 (Digitale Version des Films „Iron Man“) =
12adc7d42e68e56c67c6f42659f07bf6d5b369781fd8d226b9ba61ea7fdfd22f

```

Kryptografische Hash-Funktionen alleine haben schon eine Vielzahl von Anwendungen außerhalb der Mathematik. Mit ihnen ist es z.B. sehr einfach möglich

¹³Das ist eine Zahl mit 78 Dezimalstellen

zu überprüfen, ob eine Information, die über eine gestörte Leitung gegangen ist, in Mitleidenschaft gezogen wurde oder nicht: Sowohl der Sender als auch der Empfänger berechnen den Wert der SHA-256 Funktion für die Information und vergleichen das Ergebnis¹⁴.

5.3.2 Blockchains

Die *Blockchain* im Kontext von Bitcoin ist buchstäblich eine Kette von Blöcken, die auf viele Computer verteilt abgespeichert wird. Dafür sollten wir zuerst verstehen, was ein Block ist, und wie zwei Blöcke miteinander verbunden sein können.

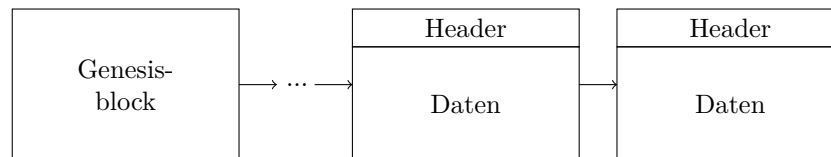


Abbildung 20: Schematische Darstellung einer Blockchain

Ein Block besteht also aus einem *Header* und *Daten*. Konzentrieren wir uns zuerst auf die Daten: Sie bestehen ausschließlich aus sog. *Transaktionen*. Transaktionen sind tatsächlich im buchhalterischen Sinne gemeint: eine Menge von Beträgen mit Quell- und Zielkonten. Die Besonderheit bei Bitcoin ist nun, dass die Einrichtung eines Kontos eben keine zentrale Stelle – eine Bank – benötigt. Um ein Bitcoin-Konto zu erstellen, muss noch nicht einmal eine Internet-Verbindung bestehen: Es muss nur eine Reihe von Berechnungen ausgeführt werden, um den *privaten Schlüssel* und den *öffentlichen Schlüssel* zu erstellen. Der private Schlüssel entspricht in etwa der Bankkarte zusammen mit der PIN und aus dem öffentlichen Schlüssel kann die sog. *Wallet Adresse* – entspricht in etwa der Konto-Nummer – hergeleitet werden. Einfach gesagt: Wer im Besitz des privaten Schlüssels ist, kann über die Bitcoin auf dem zugehörigen Konto verfügen. Man sollte ihn also geheim halten. Verliert man seinen Schlüssel und hat keine Sicherheitskopie, sind alle Bitcoin auf dem Konto verloren.

Die Blockchain ist nicht viel mehr als ein verteiltes Kassenbuch: In ihr sind alle Transaktionen, die je stattgefunden haben, einsichtig. Woher die ersten Bitcoin kamen, damit sich überhaupt Beträge von einem Konto auf ein anderes bewegen können, klären wir später. Nehmen wir einfach erst mal an, es gibt Konten, auf denen sich ein positiver Betrag befindet. Diese Beträge können sich nun über Einträge im Kassenbuch verändern. Im Fall von Bitcoin muss sichergestellt werden, dass nur berechnigte Personen Einträge in dieses Kassenbuch machen

¹⁴Gibt es auch nur leichte Unterschiede, wird der SHA-256-Wert sich trotzdem sehr stark unterscheiden, unterscheiden sich die Werte nur ein bisschen, kann dies einfach durch die Störung in der Leitung begründet sein.

dürfen – das Kassenbuch ist ja öffentlich zugänglich und jeder Teilnehmer kann Einträge hinzufügen.

In klassischen Bank-Systemen ist dafür eine EC-Karte, eine Kreditkarte und/oder eine PIN nötig¹⁵. Im Falle von Bitcoin ermöglicht der oben erwähnte private Schlüssel das Erstellen von ausgehenden Transaktionen für das zugehörige Konto. Das darunterliegende Verfahren heißt ECDSA (Elipitic Curve Digital Signature Algorithm) und ist ein sehr geeignetes Thema für eine ähnliche – aber andere – Einheit. Um also einen Betrag von meinem Bitcoin-Konto auf ein anderes Bitcoin-Konto zu übertragen, erstellt man eine entsprechende Transaktion und *signiert* sie mit Hilfe eines privaten Schlüssels. ECDSA ist derartig gestaltet, dass nun jeder mithilfe des zugehörigen öffentlichen Schlüssels nachweisen kann, dass diese Transaktion mithilfe des privaten Schlüssels signiert wurde.

Oben wurde erwähnt, dass das Kassenbuch auf vielen verschiedenen Computern gleichzeitig gespeichert wird. Wie wird das Erstellen neuer Einträge synchronisiert? Wenn jeder Teilnehmer Transaktionen erstellen und dem Kassenbuch hinzufügen kann, würde es sofort viele verschiedene Kassenbücher geben, die auf irgendeine koordinierte Art und Weise wieder zusammengeführt werden müssen. Eines der Design-Ziele von Bitcoin ist aber, dass es keine solche zentrale Koordinations-Stelle gibt (im Falle einer Bank sorgen Computer an selbiger dafür, dass alles in geordneten Bahnen läuft). Verschiedene Cryptowährungen lösen dieses Problem auf verschiedene Art- und Weisen. Bitcoin wählt den sog. *proof-of-work*.

Wie wird also sichergestellt, dass sich alle einig darüber sind, welche Transaktionen stattgefunden haben und welche nicht? Im Falle von Bitcoin gibt es eine Gruppe von Personen, die sogenannten *Miner*. Diese stellen mit einem gleich vorgestellten Verfahren sicher, dass Transaktionen in *Blöcken* zusammengefasst und dem Kassenbuch hinzugefügt werden. Jeder Mensch im Besitz eines Computers kann sich an diesem Mining-Prozess beteiligen. Es gibt fertige Software, die einfach nur ausgeführt werden muss.

Eine Transaktion auszuführen bedeutet also, sie zu veröffentlichen und dann zu warten, bis ein Miner sie zu einem Block hinzugefügt hat und dieser der Blockchain hinzugefügt wurde. Dies sollte aus rein praktischen Gründen nicht zu lange dauern. Um einen neuen Block zu *finden* oder zu *minen*, muss zuerst ein neuer Header erstellt werden. Der Header besteht bei Bitcoin aus den folgenden sechs Informationen:

1. **Software Version** Aktuell¹⁶ gibt es vier verschiedene Versionen. Die aktuellste ist 4.
2. **Hash des vorherigen Blocks** Der SHA-256 Hash des Headers des vorherigen Blocks.

¹⁵ Absurderweise auch alleine eine Unterschrift – aber ich schweife ab

¹⁶ 29. November 2018

3. **Hash der Merkle-Wurzel des aktuellen Blocks** Ein Hash über alle Transaktionen im aktuellen Block. Um Validierung zu beschleunigen wird hier ein sog. *Merkle-Baums* als Datenstruktur verwendet.
4. **Zeitstempel** Das aktuelle Datum und die aktuelle Uhrzeit. Sie wird in sog. *Unixzeit* angegeben – die Anzahl der Sekunden, die seit dem 1. Januar 1970 00:00 UTC vergangen sind¹⁷.
5. **Schwierigkeit** Die Bedeutung dieser Zahl wird im folgenden Absatz geklärt¹⁸.
6. **Nonce** Eine frei wählbare Zahl. Warum dies wichtig ist, wird im Folgenden klar werden.

Ungefähr alle zwei Wochen wird die oben genannte *Schwierigkeit* im Bitcoin Netzwerk angepasst. Damit wird sicher gestellt, dass ungefähr alle zehn Minuten ein neuer Block gefunden wird, egal wie viele Miner danach suchen. Wie dies genau funktionieren soll, klären wir jetzt: Der Clou ist nämlich, dass der SHA-256 Hash des gerade gefundenen Headers – als Zahl interpretiert – kleiner als die Schwierigkeit sein muss.

Nimmt man an, dass SHA-256 kryptografisch ist, sollten Werte zufällig und gleichverteilt im Wertebereich liegen und kleine Variationen, wie z.B. in der *Nonce*, sorgen für einen völlig anderen Wert. Weiterhin sorgt die Variation in der Uhrzeit und natürlich in neu hinzukommenden Transaktionen dafür, dass sich die zugrundeliegende Datenmenge ständig verändert. Es gibt aber keinen bekannten systematischen Algorithmus, um den SHA-256 Hash eines Datums zu manipulieren. Der einzig bekannte Weg ist also, eine andere Nonce zu wählen und erneut zu hashen. Führt man diese Berechnung so oft pro Sekunde aus wie möglich, erhöht man entsprechend die Wahrscheinlichkeit, zufällig eine passende Nonce zu finden.

Die Geschwindigkeit, mit der die SHA-256-Funktion ausgewertet werden kann, wird in Hashes pro Sekunde gemessen oder H/s . Vereinfacht gesprochen, sind CPUs in der Lage im Bereich von kH/s zu arbeiten, Grafikkarten im Bereich von MH/s , programmierbare Hardware im Bereich von GH/s und hochspezialisierte Hardware im TH/s -Bereich. Wir werden später klären, was ein Miner überhaupt dazu bewegt, obige Hardware anzuschaffen und zu betreiben.

Sobald ein Miner einen Block gefunden hat, propagiert er ihn im Bitcoin-Netzwerk. Nun kann jeder Teilnehmer nachprüfen, ob der Block gültig ist und das sog. *consensus protocol* sorgt dafür, dass sich der Block möglichst schnell verbreitet. Theoretisch ist es möglich, dass zwei Miner gleichzeitig einen neuen Block finden. Tritt ein solches unwahrscheinliches Ereignis auf, sorgt das oben genannte Protokoll dafür, dass sich die langfristig längere der beiden Block-Chains durchsetzt.

¹⁷aktuell ungefähr 1543500000

¹⁸Am 27. November 2018 beträgt ihr Wert ca. 6653303141405

5.3.3 Merkle-Bäume

Um einzelne Transaktionen effizient validieren zu können verwendet Bitcoin sog. *Merkle-Bäume*. Dabei werden alle Daten, hier die Transaktionen, gehasht und die Ergebnisse iterativ „nach oben“ hin kombiniert und wieder gehasht (s. Abb. 21).

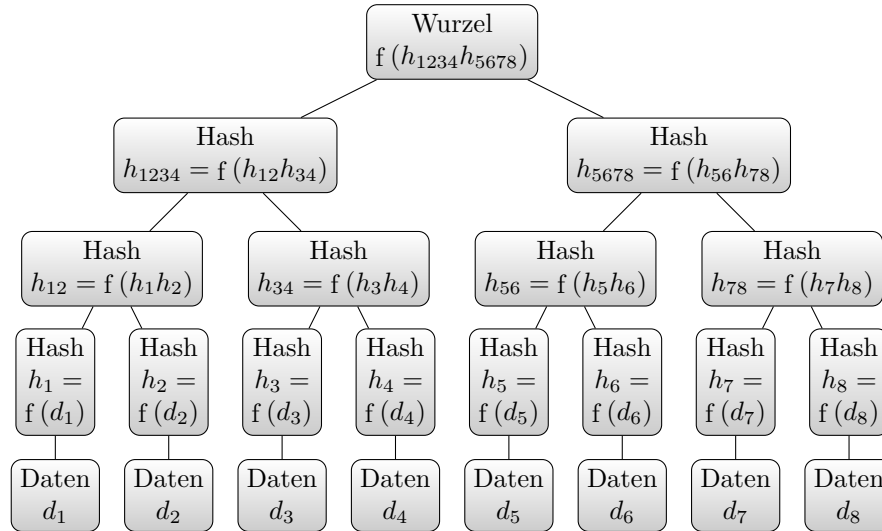


Abbildung 21: Schematische Darstellung eines Merkle-Baums

Wird ein Teil der Daten verändert, beeinflusst und verändert das alle Hashes auf dem Pfad zur Wurzel inklusive selbiger. Damit genügt alleine der Wurzel-Hash um die Integrität aller Daten zu gewährleisten.

5.3.4 Motivation der Miner

Bisher haben wir noch nicht geklärt, warum Miner überhaupt eine Motivation daran haben, Blöcke zu finden und entsprechend Hardware anzuschaffen und dann auch zu betreiben.

1. Jede Transaktion im Netzwerk kostet eine Transaktionsgebühr. Diese geht an denjenigen Miner, der einen neuen Block gefunden hat.
2. Weiterhin gibt es für den Miner, der einen Block gefunden hat, eine Belohnung. Diese Belohnung treten im Block als Transaktion ohne Absender

auf und sind die einzigen Transaktionen dieser Art¹⁹. Als Empfänger dieser Transaktion sollte ein Bitcoin-Konto, welches vom Miner kontrolliert wird, angegeben werden.

Hier wird nun auch klar, woher die ersten Bitcoin kamen: sie waren einfach Belohnungen für die ersten Blöcke.

5.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden zwei echte Anwendungsfälle besprochen: Das Bauen einer Treppe und Bitcoin. Beide versuchen, die anfänglich diskutierten Schwächen von Anwendungen, wie sie häufig in der Schule vorkommen, zu umschiffen: Der Treppenbau stammt tatsächlich aus der echten Welt und bei der Darstellung von der Funktionsweise von Bitcoin wurden möglichst wenige Vereinfachungen gemacht.

¹⁹Aktuell beträgt die Belohnung 12,5 Bitcoin, also ca. 40.000 €

6 Abschluss und Ausblick

Im Rahmen dieses Skriptes wurde versucht, Quellen für Begeisterung für Mathematik zu identifizieren. Ähnlich zu den verschiedenen Lerntypen könnte es also sein, dass es verschiedene „Motivationstypen“ gibt, die entsprechend unterschiedlich angesprochen werden können. Um dies zu ermöglichen wurden beispielhaft verschiedene Unterrichtsthemen oder ganze Einheiten vorgestellt, die versuchen dies zu leisten.

Nichts in diesem Skript wurde wissenschaftlich und/oder empirisch nachgewiesen oder überprüft. Alles hier Vorgestellte basiert ausschließlich auf den persönlichen Erfahrungen des Autors.

Literatur

- [Mur93] Roberta Mura. „Images of mathematics held by university teachers of mathematical sciences“. In: *Educational Studies in Mathematics* 25.4 (Dez. 1993), S. 375–385. ISSN: 1573-0816. DOI: 10.1007/BF01273907. URL: <https://doi.org/10.1007/BF01273907>.
- [TN12] R. Tobies und H. Neunzert. *Iris Runge: A Life at the Crossroads of Mathematics, Science, and Industry*. Science Networks. Historical Studies. Springer Basel, 2012, S. 9. ISBN: 9783034802512. URL: <https://books.google.de/books?id=EDm0eQqFUQ4C>.
- [Bit18] Bitcoin. *Bitcoin — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [Online; abgerufen am 27-November-2018]. 2018. URL: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Bitcoin&oldid=183127476>.
- [Gru18] Grumpy Cat. *Grumpy Cat — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [Online; abgerufen am 28-November-2018]. 2018. URL: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Grumpy_Cat&oldid=182239710.
- [Key18] Keyboard Cat. *Keyboard Cat — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [Online; abgerufen am 28-November-2018]. 2018. URL: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Keyboard_Cat&oldid=168917648.
- [Lol18] Lolcat. *Lolcat — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [Online; abgerufen am 28-November-2018]. 2018. URL: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Lolcat&oldid=173894075>.
- [Mat18a] Mathematik. *Mathematik — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [Online; abgerufen am 16-Juni-2018]. 2018. URL: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Mathematik&oldid=177898759>.

- [Mat18b] Mathematikunterricht. *Mathematikunterricht* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [Online; abgerufen am 16-Juni-2018]. 2018. URL: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Mathematikunterricht&oldid=175316289>.
- [Nya18] Nyan Cat. *Nyan Cat* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [Online; abgerufen am 28-November-2018]. 2018. URL: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Nyan_Cat&oldid=179964324.
- [AMM] AMMS. „*Movie Review*“ *Good Will Hunting, Reviewed by Mark Saul*. <https://www.youtube.com/watch?v=J1n078qIAf8>. Abgerufen am 28.11.2018. URL: <http://www.ams.org/notices/199804/review-saul.pdf>.
- [Beu] Johann Beurich. *DorFuchs*. <http://www.dorfuchs.de/>. Abgerufen am 26.11.2018. URL: <http://www.dorfuchs.de/>.
- [NDR] NDR. *DorFuchs bei „Kaum zu Glauben!“* <https://www.youtube.com/watch?v=J1n078qIAf8>. Abgerufen am 26.11.2018. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=J1n078qIAf8>.