

# Knotentheorie – Eine topologische Invariante

Lars A. Wallenborn  
lars@wallenborn.net  
<http://www.wallenborn.net>

25. September 2011

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Reidemeisterbewegungen</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Das Klammerpolynom</b>	<b>4</b>
3.1	Eigenschaften . . . . .	4
3.2	Invarianz unter Reidemeisterbewegungen vom Typ II. . . . .	5
3.3	Invarianz unter Reidemeisterbewegungen vom Typ III. . . . .	6
3.4	Reidemeisterbewegungen vom Typ I. . . . .	6
<b>4</b>	<b>Der Twist</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Das Jones-Polynom</b>	<b>8</b>

### Zusammenfassung

Dies ist ein Skript zum gleichnamigen Vortrag, der im Rahmen verschiedener Förderprojekte wie z.B. den Akademien des Landesverbandes Mathematikwettbewerbe NRW e.V. gehalten wurde. Zielgruppe sind interessierte Schüler ab der 10. Klasse.

Wer Fehler findet, Kritik oder Verbesserungsvorschläge machen möchte, sende mir bitte eine E-Mail. Ich bin für Kommentare und Feedback vom Tippfehler bis zur Konzeption – insbesondere auch von Schülern – immer dankbar. Das Skript ist online verfügbar und kann daher auch leicht aktualisiert werden. Alle nötigen Adressen stehen oben im Titel.

# 1 Einleitung

Nehme einen Bindfaden, lege ihn irgendwie vor dir auf den Tisch und klebe die Enden zusammen. Das so entstandene Objekt nennen wir *Knoten*.

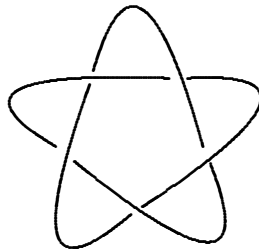


Abbildung 1: Beispiel für einen Knoten

Es ergeben sich sofort zwei sehr natürliche Fragen:

1. Lässt sich ein Knoten zu einem einfach „Kreis“ entwirren?
2. Lassen sich zwei gegebene Knoten ineinander überführen oder nicht?

*Bemerkung 1.1.* Wir werden es an dieser Stelle bei der oben stehende (ausschließlich anschauliche) „Definition“ eines Knoten belassen.

**Definition 1.2.** Es sei  $\mathcal{K}$  die Menge aller Knoten.

Wenn sich ein Knoten in einen anderen überführen lässt, so nennen wir die beiden Knoten *äquivalent*. Sind zwei Knoten  $K_1$  und  $K_2$  äquivalent so schreiben wir dafür auch  $K_1 \sim K_2$ . Zu einem gegebenen Knoten nennt man die Menge aller Knoten, die zu ihm äquivalent sind seine *Äquivalenzklasse* oder in Symbolen: Sei  $K$  ein Knoten, dann ist

$$[K] := \{ K' \in \mathcal{K} \mid K' \sim K \}$$

seine Äquivalentklasse. In der Mathematik kommt dieser Prozess des Bildens von Äquivalenzklassen sehr häufig vor.

Der Knoten, der entsteht indem man den Faden einfach in einem Kreis legt und die Enden verbindet, nennen wir *Unknoten*. Die Frage, ob es überhaupt Knoten gibt, die nicht zum Unknoten äquivalent sind, drängt sich vielleicht auch auf. Ausserdem wirkt es auf den ersten Blick sehr schwer zu beweisen, dass ein Knoten *nicht* zum Unknoten äquivalent ist: Man müsste beweisen, dass es *keine* Überführung gibt, was sich wohl nicht ausschließlich durch das Aufzählen endlich vieler Überführungen erreichen lässt.

Um an diese, und noch einige andere Fragen, heranzugehen werden wir eine sogenannte *topologische Invariante* einführen. Sei  $A$  eine Abbildung, die jedem Knoten ein algebraisches Objekt zuordnet (z.B. eine Zahl oder ein Polynom etc.). Man spricht nun von einer *Invarianten*, wenn stets für zwei Knoten  $K_1$  und  $K_2$  gilt, dass

$$K_1 \sim K_2 \Rightarrow A(K_1) = A(K_2). \quad (1)$$

Man spricht von einer *vollständigen Invarianten*, wenn sogar gilt:

$$K_1 \sim K_2 \Leftrightarrow A(K_1) = A(K_2). \quad (2)$$

Sind zwei Knoten äquivalent, so werden sie also von einer Invarianten auf das gleiche algebraische Objekt abgebildet. Dies heißt natürlich bei Weitem noch nicht, dass zwei Knoten, die auf das gleiche algebraische Objekt abgebildet werden, äquivalent sind, eine Invariante kann uns aber trotzdem weiter helfen: Aussagenlogisch betrachtet ist (1) nämlich gleichbedeutend zu:

$$K_1 \not\sim K_2 \Leftrightarrow A(K_1) \neq A(K_2).$$

Würde eine Invariante einen Knoten also auf ein anderes Objekt abbilden als sie es mit dem Unknoten machen würde, hätten wir bewiesen, dass dieser Knoten, nicht zum Unknoten äquivalent ist. Und das, ohne eine unübersichtliche Anzahl von Überführungsbewegungen durchzuführen und schwierig zu argumentieren.

*Bemerkung 1.3.* Von einer *topologischen Invariante* sprechen wir hier, weil der Knoten auch als sogenannter topologischer Raum aufgefasst werden kann. Hier weiter in die Tiefe zu gehen, würde allerdings den Rahmen dieses Vortrags und des Skriptes sprengen.

*Bemerkung 1.4.* Das Problem, zu zwei Knotendiagrammen zu entscheiden, ob sie zum gleichen Knoten gehören oder nicht, wird durch die oben stehenden Reidemeisterbewegungen wahrscheinlich kaum leichter: Liegen zwei Diagramme mit jeweils 10 Kreuzungen vor, könnte die Anzahl der Kreuzungen erst von 10 auf 10000 steigen um dann erst wieder auf 10 zu fallen. Auch heißt die Tatsache, dass man nach 1000000 Bewegungen nicht zum Ziel gekommen ist, lange nicht, dass man es nicht nach 1000001 Bewegungen geschafft hat.

**Definition 1.5** (Verschlingung). Mehrere Knoten zusammen heißen *Verschlingung*. Die Menge der Verschlingungen sei mit  $\mathcal{L}$  bezeichnet.

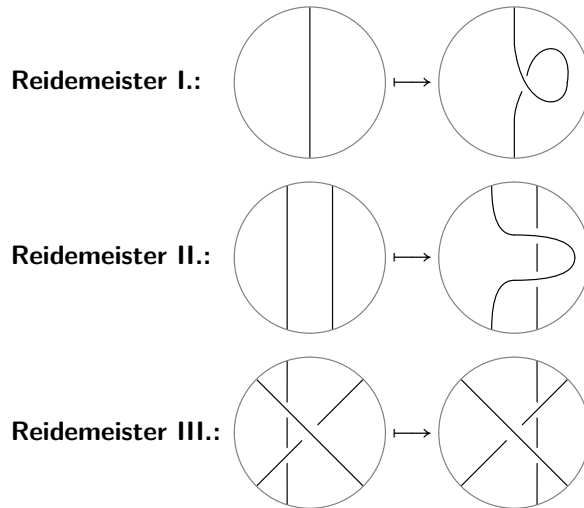
*Bemerkung 1.6.* Natürlich gilt  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$ .

**Definition 1.7** (Disjunkte Vereinigung). Wenn  $K_1$  und  $K_2$  Knoten sind, so ist  $K_1 \sqcup K_2$  die Verschlingung, die entsteht, wenn man  $K_1$  und  $K_2$  nebeneinander legt.

## 2 Reidemeisterbewegungen

Zunächst wollen wir den Prozess des Überführens formalisieren. Um einfacher mit Knoten auf dem Papier arbeiten zu können, betrachten wir nicht den Knoten selbst sondern ein sogenanntes Knotendiagramm. Dies ist die Zeichnung eines Knoten auf Papier auf dem Überkreuzungen durch das aussparen des Strichs angedeutet sind (siehe wieder Abbildung 1). Da sich ein Knoten und ein zugehöriges Knotendiagramm auf dem Papier nicht unterscheiden lassen, verwenden wir diese beiden Begriffe als Synonyme.

**Definition 2.1** (Reidemeisterbewegungen). Die folgenden drei Transformationen lassen sich auf Knotendigramme anwenden:



**Theorem 2.2.** Reidemeisterbewegungen lassen die Äquivalenzklasse eines Knotendigrams unverändert.

### 3 Das Klammerpolynom

**Definition 3.1** (Polynome und Laurent-Polynome). Es sei  $\mathbb{Z}[X]$  die Menge aller Polynome in einer Variable und  $\mathbb{Z}[X, Y, Z]$  die Menge aller Polynome in drei Variablen. Weiterhin sei

$$\mathbb{Z}[X, X^{-1}] := \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i X^i \mid a_i = 0 \text{ fast immer} \right\}$$

die Menge aller *Laurent-Polynome* in einer Variablen.

#### 3.1 Eigenschaften

Wir wollen einem Knoten  $K$  nun das Klammerpolynom  $\langle K \rangle$  zuordnen. Wir werden es konstruktiv herleiten. Sei also  $\langle \cdot \rangle : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[X, Y, Z]$  eine Abbildung von der Menge aller Verschlingungen in die Menge der Polynome in drei Variablen mit den folgenden Eigenschaften:

**Entknoten (1):**  $\langle \text{crossing} \rangle = X \langle \text{cup} \rangle + Y \langle \text{cap} \rangle$

**Vereinfachen (2):**  $\langle K \sqcup \bigcirc \rangle = Z \langle K \rangle \quad \forall K \in \mathcal{K}$

**Normierung (3):**  $\langle \bigcirc \rangle = 1$

*Bemerkung 3.2.* Der graue Kreis oben bedeutet, dass wir einen Ausschnitt aus einem größeren Knoten betrachten. An jedem Faden, der den Kreis verläßt, ist also der restliche Knoten „angeschlossen“.

Die erste Eigenschaft ermöglicht es uns, eine Kreuzung aus der Projektion zu entfernen. Da es nur endlich viele Überkreuzungen gibt, kann man diesen Vorgang so lange wiederholen, bis nur noch Unknoten vorhanden sind. Mit der zweiten Eigenschaft lassen sich dann fast alle dieser Unknoten durch die Variable  $Z$  ersetzen. Der übrig gebliebene Unknoten wird dann einfach auf 1 abgebildet. Insgesamt bilden wir also einen Knoten auf einen Term in den Variablen  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  ab.

**Beispiel 3.3.**

$$\begin{aligned} \langle \text{Figure-eight} \rangle &= X \langle \text{waist} \rangle + Y \langle \bigcirc \bigcirc \rangle \\ &= X \langle \bigcirc \rangle + Y \langle \bigcirc \bigcirc \rangle = X + YZ \end{aligned}$$

Nun wollen wir natürlich, dass das Klammerpolynom invariant unter den Reidemeisterbewegungen ist. Fordern wir diese Invarianz, werden wir zunächst Zusammenhänge zwischen den drei Variablen erhalten und können so zwei der drei Variablen eliminieren.

### 3.2 Invarianz unter Reidemeisterbewegungen vom Typ II.

Wir werden einen Ausschnitt eines Knotens betrachten an dem eine Reidemeisterbewegung vom Typ II. (rückwärts) ausgeführt werden kann und werden die Entkreuzungseigenschaft des Klammerpolynoms verwenden:

$$\begin{aligned} \langle \text{crossing} \rangle &\stackrel{(1)}{=} X \langle \text{cup} \rangle + Y \langle \text{cap} \rangle = X \langle \text{cup} \rangle + Y \langle \text{crossing} \rangle \\ &\stackrel{(1)}{=} X \left[ X \langle \text{cup} \rangle + Y \langle \text{cap} \rangle \right] + Y \left[ X \langle \text{cup} \rangle + Y \langle \text{cap} \rangle \right] \\ &\stackrel{(1)}{=} XY \langle \text{cap} \rangle + XY \langle \text{cup} \rangle + (X^2 + Y^2) \langle \text{crossing} \rangle \\ &\stackrel{(2)}{=} XYZ \langle \text{cup} \rangle + XY \langle \text{cup} \rangle + (X^2 + Y^2) \langle \text{crossing} \rangle \\ &= (X^2 + XYZ + Y^2) \langle \text{cup} \rangle + XY \langle \text{cup} \rangle \stackrel{!}{=} \langle \text{cup} \rangle \end{aligned}$$

Wobei die letzte Gleichheit daraus folgt, dass wir Invarianz unter Reidemeisterbewegung II. fordern. Mit Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$\begin{aligned} X^2 + XYZ + Y^2 &= 0 \\ XY &= 1 \end{aligned}$$

Daraus folgen folgende Relationen zwischen den Variablen:

$$\begin{aligned} Y &= X^{-1} \\ Z &= -X^2 - Y^2 = -X^2 - X^{-2} \end{aligned}$$

Fordert man also die Invarianz unter Reidemeister II., wird das Klammerpolynom zu einem Laurent-Polynom in einer Variablen.

**Beispiel 3.4.** Nach 3.3 ist

$$\left\langle \text{Diagramm} \right\rangle = X + X^{-1}(-X^2 - X^{-2}) = X - X - X^{-3} = -X^{-3}.$$

### 3.3 Invarianz unter Reidemeisterbewegungen vom Typ III.

**Theorem 3.5.** Das eben konstruierte Klammerpolynom ist invariant unter Reidemeisterbewegungen vom Typ III.:

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \left\langle \text{Diagramm} \right\rangle &\stackrel{(I.)}{=} X \left\langle \text{Diagramm} \right\rangle + X^{-1} \left\langle \text{Diagramm} \right\rangle \\ &\stackrel{(II.)}{=} X \left\langle \text{Diagramm} \right\rangle + X^{-1} \left\langle \text{Diagramm} \right\rangle \stackrel{(I.)}{=} \left\langle \text{Diagramm} \right\rangle \end{aligned}$$

□

### 3.4 Reidemeisterbewegungen vom Typ I.

Leider ist das Klammerpolynom nicht invariant unter Reidemeisterbewegungen vom Typ I., dabei war diese die am einfachsten anmutende Bewegung:

**Theorem 3.6.** Eine Reidemeisterbewegung vom Typ I. erzeugt einen Faktor  $-X^{\pm 3}$  im Klammerpolynom. Insbesondere ist es nicht invariant unter dieser Bewegung.

Beweis.

$$\begin{aligned}
 \left\langle \text{Knoten} \right\rangle &= X \left\langle \text{Knoten} \right\rangle + X^{-1} \left\langle \text{Knoten} \right\rangle \\
 &= X \left\langle \text{Knoten} \right\rangle + X^{-1} (-X^2 - X^{-2}) \left\langle \text{Knoten} \right\rangle \\
 &= X + X^{-1} (-X^2 - X^{-2}) \left\langle \text{Knoten} \right\rangle \\
 &= X - X - X^{-3} \left\langle \text{Knoten} \right\rangle = -X^{-3} \left\langle \text{Knoten} \right\rangle
 \end{aligned}$$

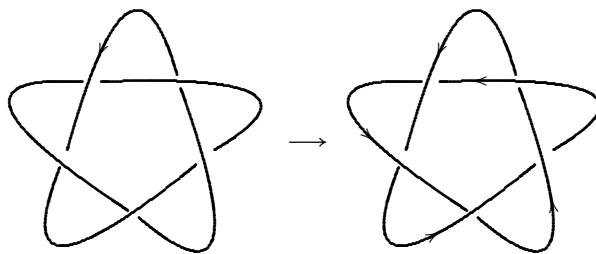
□

Wir können das Klammerpolynom aber reparieren. Dabei hilft uns...

## 4 Der Twist

In diesem Kapitel wollen wir eine Abbildung  $\omega : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{Z}$  konstruieren, die, zusammen mit dem bis gerade konstruierten Klammerpolynom, eine topologische Invariante für Knoten liefert. Sie wird den Namen *Twist* oder *Verwindungszahl* tragen. Dazu zeichnen wir an irgendeine Stelle im Knoten einen Pfeil, man sagt dann auch, dass dieser eine „Orientierung auf dem gesamten Knoten induziert“.

**Beispiel 4.1.**

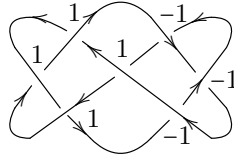


Mithilfe der „Rechten-Hand-Regel“ versehen wir nun jede Kreuzung mit einer „Kreuzungsziffer“ (einer 1 oder einer -1).

**Definition 4.2** (Kreuzungsziffer).



**Beispiel 4.3.**



**Definition 4.4.** Seien  $(e_1, \dots, e_d)$  die Kreuzungsziffern der  $d$  Kreuzungen eines Knoten  $K$ , dann ist der *Twist* definiert als:

$$\omega(K) := \sum_{i=1}^d e_i.$$

**Beispiel 4.5.**

$$\omega \left( \begin{array}{c} \text{Diagram} \end{array} \right) = 4 - 3 = 1$$

Da man bei der Definition des Twists die Orientierung eines Knoten willkürlich gewählt hat, ist nicht von vornherein klar, dass der Twist wohldefiniert ist.

**Theorem 4.6.** *Der Twist ist wohldefiniert.*

*Beweis.* Wählt man die andere Orientierung, so ändert sich die Pfeilrichtung *beider* Pfeile an jeder Kreuzung. Somit bleibt die Kreuzungsziffer an dieser Kreuzung gleich und der Twist ist wohldefiniert.  $\square$

**Theorem 4.7.** *Der Twist ist invariant unter Reidemeisterbewegungen vom Typ II. und III.*

*Beweis.* Systematisches Durchgehen aller Möglichkeiten liefert das Ergebnis.  $\square$

## 5 Das Jones-Polynom

Mithilfe des Klammerpolynoms und des Twists können wir nun das normalisierte Klammerpolynom definieren:

**Definition 5.1** (Normalisiertes Klammerpolynom). Das *normalisierte Klammerpolynom* eines Knotendiagramms  $K$  ist definiert als:

$$N(K) := (-X^3)^{-\omega(K)} \langle K \rangle.$$

**Theorem 5.2.** *Das normalisierte Klammerpolynom ist invariant unter allen Reidemeisterbewegungen.*



*Beweis.* Invarianz unter den Reidemeisterbewegungen vom Typ II. und III. folgt aus der entsprechenden Invarianz des (unnormalisierten) Klammerpolynoms und des Twists. Eine Reidemeisterbewegung vom Typ I. verändert den Twist eines Knotens um  $\pm 1$ , was dafür sorgt, dass der nach 3.6 erscheinenden Faktor von  $-X^{\pm 3}$  im normalisierten Klammerpolynom weggehoben wird.  $\square$

**Definition 5.3.** Das *Jones-Polynom* eines Knotendiagramms  $K$  entsteht aus dem normalisierten Klammerpolynom durch die Substitution  $X = t^{-\frac{1}{4}}$ :

$$V(K) := N(K) \Big|_{X=t^{-\frac{1}{4}}}.$$

## Literatur

- [COL] Colin C. Adams, „The knot book“, American Mathematical Society; Auflage: illustrated edition (August 2004), ISBN-10 0821836781, ISBN-13 978-0821836781
- [KAU] Louis H. Kaufmann, „Knoten - Diagramme, Zustandsmodelle, Polynomvarianten“, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg 1995, ISBN 3-86025-232-1
- [SPE] Spektrum der Wissenschaft DIGEST 2/2002