Lorentz-Geometrie

Nikolai Nowaczyk <mail@nikno.de> http://math.nikno.de/
Lars Wallenborn <lars@wallenborn.net> http://www.wallenborn.net/

06.12.-08.12. 2013

Inhaltsverzeichnis

1. Vektorrechnung **2**
- 1.1. Grundlegende Definitionen 2
- 1.2. Geometrie 3
- 1.3. Bilinearformen 4
- 1.4. Basen 5

2. Der Minkowski-Raum **6**
- 2.1. Grundlegende Definitionen 6
- 2.2. Kausalstruktur 7
- 2.3. Geometrie 9

3. Beobachter und Teilchen **12**
- 3.1. Zwillingsparadoxon 13

A. Anhang **14**
- A.1. Die Wahrheit über Sinus und Cosinus 14
- A.2. Hyperbolische Trigonometrie 15

Index **17**

Symbolverzeichnis **19**

1. Vektorrechnung

1.1. Grundlegende Definitionen

1.1 Definition ($\mathbb{R}^n$)**.** Man nennt

$$\mathbb{R}^n := \{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

den n-*dimensionalen euklidischen Raum* oder auch den “R hoch n”. Ein Element $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ heißt *Vektor* und $x_1, \ldots, x_n$ seine *Koordinaten*. Die Physiker machen kleine Pfeile über ihre Vektoren, z.B. $\vec{x}$. Wir nicht.
Wichtigster Anwendungsfall ist der $\mathbb{R}^2$ (die euklidische Ebene), der $\mathbb{R}^n$ (der euklidische Raum) und später auch der $\mathbb{R}^4$ (der euklidische Hyperraum).

1.2 Definition (Vektoroperationen)**.** Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind folgende Operationen definiert.

(i). Addition

$$x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

(ii). Skalarmultiplikation

$$\lambda x := \lambda \cdot x := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

(iii). Euklidisches Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \in \mathbb{R}.$$

(iv). Norm/Länge

$$|x| := \sqrt{\langle x, x \rangle}. \tag{1.1}$$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & + & 3 & = & 5 \\ 1 & + & 2 & = & 3 \\ 5 & + & 4 & = & 9 \end{array}$$

Grundschule

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Oberstufe

Abbildung 1.1: Addition

1.2. Geometrie

1.3 Definition (Einheitssphäre)**.** Die Menge

$$\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$$

heißt *Einheitssphäre der Dimension* n.

1.4 Definition (Winkel)**.** Für zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x, y \neq 0$, heißt

$$\measuredangle(x, y) := \arccos\left(\frac{\langle x, y\rangle}{|x||y|}\right) \tag{1.2}$$

Winkel zwischen x *und* y. Dabei sei daran erinnert, dass $\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$, also $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$. Wir messen Winkel also immer im Bogenmaß.

1.5 Bemerkung. Häufig setzt man $\varphi := \measuredangle(x, y)$ und schreibt die den Winkel definierende Gleichung auch in der Form

$$\langle x, y\rangle = |x||y| \cos(\varphi)\,. \tag{1.3}$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu (1.2).

1.6 Bemerkung. Man fragt sich vielleicht, warum man den Winkel ausgerechnet so definiert. Man kann dies mit Hilfe des Kosinussatzes definieren. In Vektorschreibweise lautet dieser

$$|z|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y| \cos(\varphi).$$

Dies kann man umformen zu

$$\begin{aligned} 2|x||y| \cos(\varphi) &= |x|^2 - |y|^2 - |y - x|^2 \\ &\overset{(1.4)}{=} |x|^2 - |y|^2 - |y|^2 + |x|^2 + 2\langle x, y\rangle \\ &= 2\langle x, y\rangle \end{aligned}$$

Das ist äquivalent zu (1.3).

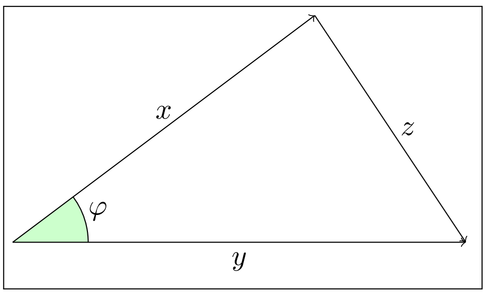

Abbildung 1.2: Der Cosinussatz

1.7 Satz (Euklidisches Skalarprodukt)**.** Es gilt

(i). Binomische Formel

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : |x + y|^2 = |x|^2 + 2\langle x, y\rangle + |y|^2 \tag{1.4}$$

(ii). Cauchy/Schwarz-Ungleichung

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : |\langle x, y\rangle| \leq |x||y|. \tag{1.5}$$

(iii). Dreiecksungleichung

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : |x + y| \leq |x| + |y|$$

Aufgabe 1.8. Beweise Satz 1.7

1.9 Definition (Orthogonalität)**.** Die Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ sind *orthogonal*, in Zeichen $x \perp y$, falls gilt

$$\measuredangle(x, y) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{oder äquivalent} \qquad \langle x, y\rangle = 0.$$

1.10 Definition (Orthogonales Komplement)**.** Sei $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Vektor. Dann heißt

$$x^\perp := \{y \in \mathbb{R}^n \mid y \perp x\}$$

das *orthogonale Komplement von* x. Analog heißt

$$x^\| := \{\lambda x \in \mathbb{R}^n \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

die *von* x *erzeugte Grade*.

1.11 Bemerkung. In der Situation von Definition 1.10 gilt auch für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ und $y \in x^\perp$

$$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle = 0,$$

d.h. die gesamte von x erzeugte Grade $x^\|$ steht senkrecht auf dem Komplement $x^\perp$.

1.12 Definition (Unterraum)**.** Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Unterraum*, falls gilt:

(i). $0 \in U$.

(ii). $\forall y_1, y_2 \in U : y_1 + y_2 \in U$.

(iii). $\forall y \in U : c \in \mathbb{R} : cy \in U$.

1.13 Bemerkung. Im $\mathbb{R}^3$ sind die Unterräume genau die Ebenen und Graden.

1.14 Lemma (Struktur des orthogonalen Komplements)**.** Sei $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist das orthogonale Komplement $x^\perp$ ein Unterraum.

1.15 Satz (Zerlegungssatz)**.** Sei $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt: Für jeden Vektor $y \in \mathbb{R}^n$ existiert genau ein Vektor $y_1 \in x^\|$ und genau ein Vektor $y_2 \in x^\perp$, sodass $y = y_1 + y_2$.

1.3. Bilinearformen

1.16 Definition. Sei $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine beliebige Abbilung. Dann heißt β

(i). *bilinear*, falls gilt

$$\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n : \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \beta(x_1 + \lambda_1 y_1, x_2 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 \beta(x_1, y_1) + \lambda_2 \beta(x_2, y_2).$$

(ii). *symmetrisch*, falls gilt

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \beta(x, y) = \beta(y, x).$$

(iii). *regulär*, falls für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\forall y \in \mathbb{R}^n : \beta(x,y) = 0 \Longrightarrow x = 0$$

(iv). *positiv definit*, falls gilt

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : x \neq 0 \Longrightarrow \beta(x,x) > 0.$$

Wir nennen β ein *Skalarprodukt*, falls β bilinear, symmetrisch und positiv definit ist.

1.17 Satz. Das Eukldische Skalarprodukt ist ein Skalarprodukt.

Aufgabe 1.18. Beweise Satz 1.17.

1.19 Definition (β-Orthogonalität)**.** Sei $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine beliebige reguläre Bilinearform. Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ heißen β-*orthogonal*, in Zeichen $x \perp_\beta y$, falls $\beta(x,y) = 0$.

1.20 Definition. Sei $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine beliebige reguläre Bilinearform und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$|x|_\beta := \sqrt{|\beta(x,x)|}$$

die von β induzierte Norm von x.

1.21 Definition (β-orthogonales Komplement)**.** Sei $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Vektor. Dann heißt

$$x^{\perp_\beta} := \{y \in \mathbb{R}^n \mid y \perp_\beta x\}$$

das β-*orthogonale Komplement von* x.

1.22 Satz (β-Zerlegungsatz)**.** Sei β bilinear, symmetrisch und regulär. Sei $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Vektor. Dann ist $x^{\perp_\beta}$ ein Unterraum. Ferner gilt: Für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ existiert genau ein $y_1 \in x^{\|}$ und genau ein $y_2 \in x^{\perp_\beta}$, sodass $y = y_1 + y_2$.

1.4. Basen

1.23 Definition (kanonische Basis)**.** Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und jedes $1 \leq j \leq n$ definieren wir den Vektor $e_j \in \mathbb{R}^n$, bei dem der j-te Eintrag eine 1 ist und alle anderen gleich 0 sind. Das Tupel von Vektoren $(e_0, \ldots, e_n)$ heißt *kanonische Basis des* $\mathbb{R}^n$.

1.24 Beispiel. Die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$ sieht also so aus:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.25 Bemerkung. Es gilt dann für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \end{aligned}$$

Erfüllen umgekehrt die Zahlen $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 = x,$$

so folgt $c_1 = x_1$, $c_2 = x_2$ und $c_3 = x_3$. Die kanonische Basis (e_1, e_2, e_3) hat also folgende Eigenschaft: Für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ existieren genau drei Zahlen c_1, c_2, c_3, sodass $x = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3$.

1.26 Definition (Kronecker-Delta)**.** Für zwei natürliche Zahlen i und j heißt

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

das *Kronecker-Delta von i und j*.

1.27 Definition (Basis)**.** Ein Tupel $(b_1, \ldots, b_n)$ von Vektoren im $\mathbb{R}^n$ heißt *Basis*, falls gilt: Für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ existieren genau n reelle Zahlen $c_1, \ldots, c_n$, sodass

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i = c_1 b_1 + \ldots + c_n b_n \tag{1.6}$$

Eine Basis $(b_1, \ldots, b_n)$ heißt *Pseudo-Orthonormalbasis* bezüglich einer Bilinearform β, falls gilt

$$\forall 1 \leq i, j \leq n : \beta(b_i, b_j) = \pm\delta_{ij}.$$

Falls alle Vorzeichen $+$ sind, so heißt die Basis eine *Orthonormalbasis*.

1.28 Lemma. Die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$ ist eine Orthonormalbasis.

Aufgabe 1.29. Beweise Lemma 1.28.

2. Der Minkowski-Raum

2.1. Grundlegende Definitionen

2.1 Definition (Minkowski-Raum)**.** Wir schreiben ab sofort $\mathbb{R}^{1,n} := \mathbb{R}^{n+1}$ und notieren die Vektoren darin mit $x = x(x_0, \ldots, x_n)$. Dort definieren wir die *Minkowski-Metrik*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{1,n} : [\![x, y]\!] := -x_0 y_0 + \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

und die *Minkowski-Norm*

$$\forall x \in \mathbb{R}^{1,n} : \|x\| := \sqrt{|[\![x, x]\!]|}$$

Speziell für $n = 3$ heißt $\mathbb{R}^{1,3}$ *Minkowski-Raum*. Diese Definition geht zurück auf Hermann Minkowski, siehe Abschnitt 2.1.

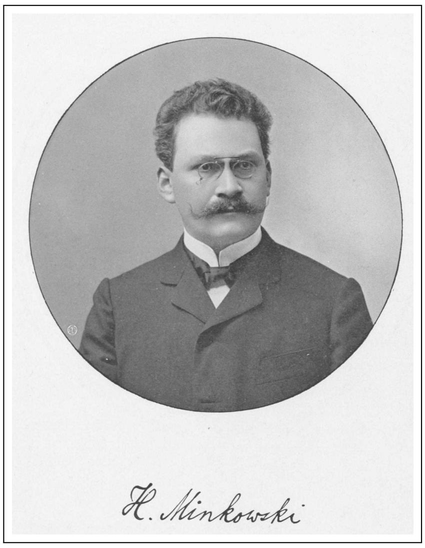

Abbildung 2.3: Hermann Minkowski, * 22.6.1864, 12.01.1909, deutscher Mathematiker und Physiker

2.2 Lemma. Die Minkowski-Metrik ist eine reguläre Bilinearform.

Aufgabe 2.3. Beweise Lemma 2.2

2.4 Bemerkung. Die Minkowski-Metrik ist kein Skalarpdoukt! Es gilt z.B. für $n = 2$ und $x = (1, 0)$

$$\llbracket x, x \rrbracket = -1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = -1.$$

Diese faszinierende Eigenschaft werden wir nun verwenden, um eine sogenannte *Kausalstruktur* zu definieren. Es gibt für das euklidische Skalarprodukt nichts Vergleichbares.

2.2. Kausalstruktur

2.5 Definition. Sei $0 \neq x \in \mathbb{R}^{1,n}$. Dann heißt x

$$\begin{aligned} \textit{raumartig}, &\quad \text{falls } \llbracket x, x \rrbracket > 0 \\ \textit{zeitartig}, &\quad \text{falls } \llbracket x, x \rrbracket < 0, \\ \textit{lichtartig}, &\quad \text{falls } \llbracket x, x \rrbracket = 0. \end{aligned}$$

Den Nullvektor $x = 0$ sehen wir als raumartig an (Vorsicht, die Literatur ist hier nicht einheitlich). Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^{1,n}$ heißt *kausal*, falls x zeitartig oder lichtartig ist. Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^{1,n}$ heißt auch *Ereignis*. Die Eigenschaft eines Vektors raum-, zeit- oder lichtartig zu sein bezeichnet man auch als den *kausalen Charakter* des Vektors.

2.6 Bemerkung (kausaler Charakter der kanonsichen Basis)**.** Betrachten wir einmal für $n = 2$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^{1,2}$, siehe Definition 1.23 bzw. Beispiel 1.24. Im Minkowski-Raum nummeriert man die dann auch mit e_0, e_1, e_2. Durch direktes Nachrechnen erhält man

$$\begin{aligned} \llbracket e_0, e_0 \rrbracket &= -1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = -1 \\ \llbracket e_1, e_1 \rrbracket &= -0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1 \\ \llbracket e_2, e_2 \rrbracket &= -0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass e_0 zeitartig, jedoch e_1 und e_2 raumartig sind. Dies gilt auch für allgemeines n: Es ist dann immer e_0 zeitartig und alle anderen Vektoren $e_1, \ldots, e_n$ sind raumartig. Daher ist also $(e_0, \ldots, e_n)$ eine Pseudo-Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^{1,n}$ im Sinne der Definition 1.27. Dies kann man sich wie folgt zu Nutze machen.

2.7 Lemma. Sei $x \in \mathbb{R}^{1,n}$. Dann gilt

$$x = x_0 e_0 + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} x_j e_j}_{=:\vec{x}} = x_0 e_0 + \vec{x}$$

und

$$[\![x, x]\!] = -x_0^2 + |\vec{x}|^2. \tag{2.1}$$

Jeden Vektor $y \in \mathbb{R}^{1,n}$ gilt außerdem

$$[\![x, y]\!] = -x_0 y_0 + \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle. \tag{2.2}$$

Aufgabe 2.8. Beweise Lemma 2.7.

2.9 Definition (Zeitorientierung)**.** Für jedes Ereignis $x \in \mathbb{R}^{1,n}$ heißt

$$T_+(x) := \{y \in \mathbb{R}^{1,n} \mid y_0 - x_0 > 0\}$$
$$T_-(x) := \{y \in \mathbb{R}^{1,n} \mid y_0 - x_0 < 0\}$$

Zukunft bzw. *Vergangenheit* von x.

2.10 Definition (Kausalstruktur)**.** Sei nun $x \in \mathbb{R}^{1,n}$ beliebig. Dann heißen

$$I(x) := \{y \in \mathbb{R}^{1,n} \mid y - x \textit{ ist zeitartig}\}$$
$$J(x) := \{y \in \mathbb{R}^{1,n} \mid y - x \textit{ ist kausal}\}$$
$$C(x) := \{y \in \mathbb{R}^{1,n} \mid y - x \textit{ ist lichtartig}\}$$

Zeitkegel, *Kausalkegel* bzw. *Lichtkegel* von x. Wir definieren außerdem

$I_\pm(x)$	$:=$	$I(x) \cap T_\pm(x)$,	die *chronologische Zukunft/Vergangenheit von* x,
$J_\pm(x)$	$:=$	$J(x) \cap T_\pm(x)$,	die *kausale Zukunft/Vergangenheit von* x,
$C_\pm(x)$	$:=$	$C(x) \cap T_\pm(x)$,	den *Zukunfts-/Vergangenheitslichtkegel von* x.

2.11 Bemerkung. Setzt man $I_\pm := I_\pm(0)$, $J_\pm := J_\pm(0)$, $C_\pm := C_\pm(0)$, dann gilt

$$I_\pm(x) = x + I_\pm, \qquad J_\pm(x) = x + J_\pm, \qquad C_\pm(x) = x + C_\pm.$$

2.12 Definition (Kegel)**.** Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Kegel*, falls gilt:

$$\forall x \in K : \forall \lambda > 0 : \lambda x \in K$$

Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Doppelkegel*, falls gilt

$$\forall x \in K : \forall \lambda \neq 0 : \lambda x \in K$$

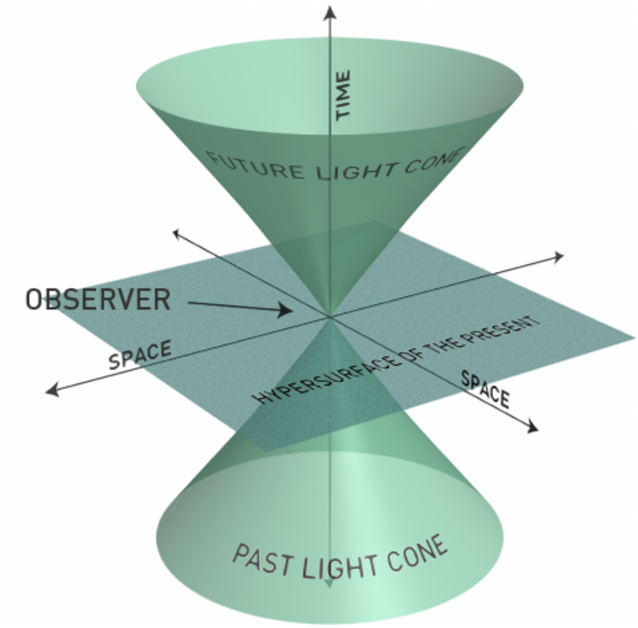

Abbildung 2.4: Kegel

2.3. Geometrie

2.13 Lemma. Für jedes $x \in \mathbb{R}^{1,n}$ gilt: Die Mengen $I(x), J(x), C(x)$ sind Doppelkegel, die Mengen $I_\pm(x), J_\pm(x), C_\pm(x)$ sind Kegel.

Aufgabe 2.14. Beweise Lemma 2.13.

2.15 Lemma (Charakterisierung von Zeitkegel)**.** Es seien $x, y \in I$, also zeitartig. Dann sind äquivalent:

(i). x und y sind beide im selben Zeitkegel (also beide in I_+ oder beide in I_-).

(ii). Es gilt $x_0 y_0 > 0$.

(iii). Es gilt $[\![x, y]\!] < 0$.

Ebenso sind x und y in verschiedenen Zeitkegeln genau dann wenn $x_0 y_0 < 0$ genau dann wenn $[\![x, y]\!] > 0$.

Beweis. Seien $x, y \in \mathbb{R}^{1,n}$ zeitartig, d.h. $x, y \in I$. Da x zeitartig ist, folgt

$$0 > [\![x, x]\!] = -x_0^2 + |\vec{x}|^2, \qquad \Longrightarrow x_0^2 > |\vec{x}|^2, \qquad \Longrightarrow |x_0| > |\vec{x}|.$$

Genauso gilt auch $|y_0| > |\vec{y}|$ und daraus folgt

$$|y_0||x_0| > |\vec{x}||\vec{y}|. \tag{2.3}$$

Es gilt außerdem gemäß (2.2)

$$[\![x, y]\!] = -x_0 y_0 + \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle. \tag{2.4}$$

und nach der Cauchy/Schwarz-Ungleichung gilt

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \overset{(1.5)}{\leq} |\vec{x}||\vec{y}| \overset{(2.3)}{<} |x_0||y_0|. \tag{2.5}$$

Deswegen folgt aus (2.4) (Zahlenstrahl malen!)

$$\operatorname{sgn}([\![x,y]\!]) = \operatorname{sgn}(-x_0y_0). \tag{2.6}$$

Es gilt daher: x und y liegen im selben Zeitkegel genau dann wenn

$$\begin{aligned} x_0y_0 > 0 &\iff \operatorname{sgn}(x_0y_0) = 1 \\ &\iff \operatorname{sgn}(-x_0y_0) = -1 \\ &\overset{(2.6)}{\iff} \operatorname{sgn}([\![x,y]\!]) = -1 \\ &\iff [\![x,y]\!] < 0. \end{aligned}$$

Der Zusatz folgt aus der Tatsache, dass stets $x_0y_0 \neq 0$ gilt, denn sonst wären x und y ja nicht zeitartig. □

2.16 Korollar. Sei $x \in \mathbb{R}^{1,n}$ zeitartig und $y \in x^{\perp\!\!\perp}$. Dann ist y raumartig oder lichtartig.

Beweis. Falls $y = 0$, dann ist y per Definition raumartig. Sei daher $y \neq 0$. Nach Voraussetzung gilt $[\![x,y]\!] = 0$. Wäre y zeitartig, dann folgt aus Lemma 2.15, dass entweder $[\![x,y]\!] > 0$ oder $[\![x,y]\!] < 0$ gilt. Widerspruch! □

2.17 Satz (Minkowski Metrik)**.** Es seien $x, y \in \mathbb{R}^{1,n}$ zeitartig. Dann gilt

(i). Inverse Cauchy/Schwarz-Ungleichung

$$|[\![x,y]\!]| \geq \|x\|\|y\|. \tag{2.7}$$

(ii). Inverse Dreiecksungleichung

$$\|x+y\| \geq \|x\| + \|y\| \tag{2.8}$$

Beweis.

(i). Gemäß Satz 1.22 können wir y zerlegen in $y = \lambda x + \vec{y}$ mit $\vec{y} \in x^{\perp\!\!\perp}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} [\![y,y]\!] &= [\![\lambda x + \vec{y}, \lambda x + \vec{y}]\!] \\ &= \lambda^2[\![x,x]\!] + 2\lambda[\![x,\vec{y}]\!] + [\![\vec{y},\vec{y}]\!] \\ &= \lambda^2[\![x,x]\!] + [\![\vec{y},\vec{y}]\!], \end{aligned}$$

und damit

$$\lambda^2[\![x,x]\!] = [\![y,y]\!] - [\![\vec{y},\vec{y}]\!]. \tag{2.9}$$

Gemäß Korollar 2.16 ist $\vec{y}$ raumartig. Daher ist

$$-[\![x,x]\!][\![\vec{y},\vec{y}]\!] > 0 \tag{2.10}$$

und es folgt

$$\begin{aligned} [\![x,y]\!]^2 &= [\![x, \lambda x + \vec{y}]\!]^2 = (\lambda[\![x,x]\!] + [\![x,\vec{y}]\!])^2 = \lambda^2[\![x,x]\!]^2 \\ &\overset{(2.9)}{=} [\![x,x]\!]([\![y,y]\!] - [\![\vec{y},\vec{y}]\!]) \\ &= [\![x,x]\!][\![y,y]\!] - [\![x,x]\!][\![\vec{y},\vec{y}]\!] \\ &\overset{(2.10)}{\geq} [\![x,x]\!][\![y,y]\!] \\ &= (-[\![x,x]\!])(-[\![y,y]\!]) \\ &= \|x\|^2\|y\|^2. \end{aligned}$$

(ii). Wir rechnen

$$\begin{aligned}(\|x| + \|y\|)^2 &= \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &\overset{(2.7)}{\leq} -[\![x,x]\!]+2|[\![x,y]\!]| - [\![y,y]\!] \\ &\overset{2.15}{=} -([\![x,x]\!]+2[\![x,y]\!]+[\![y,y]\!]) \\ &= -[\![x+y,x+y]\!] \\ &= \|x+y\|^2.\end{aligned}$$

□

2.18 Lemma (Hyperbolischer Winkel)**.** Seien $x, y \in \mathbb{R}^{1,n}$ zeitartig und im selben Zeitkegel. Dann existiert genau eine Zahl $\varphi \in \mathbb{R}$, sodass

$$\cosh(\varphi) = \frac{-[\![x,y]\!]}{\|x\|\|y\|}. \tag{2.11}$$

Es heißt dann $\varphi := \measuredangle(x, y)$ der *hyperbolische Winkel zwischen x und y.*

Beweis. Gemäß Lemma 2.15 ist $|[\![x,y]\!]| = -[\![x,y]\!]$ und somit gemäß (2.7)

$$-[\![x,y]\!] = |[\![x,y]\!]| \geq \|x\|\|y\|$$

Also gilt

$$\frac{-[\![x,y]\!]}{\|x\|\|y\|} \geq 1.$$

und somit erfüllt gemäß (A.3) die Zahl $\varphi := \operatorname{arcosh}(\frac{-[\![x,y]\!]}{\|x\|\|y\|})$ die gewünschten Eigenschaften. □

2.19 Definition (Relativgeschwindigkeit)**.** Seien $x, y \in \mathbb{R}^{1,n}$ zeitartig und im selben Zeitkegel. Sei $\varphi := \measuredangle(x, y)$. Dann heißt

$$v := v(x, y) := \tanh(\varphi)$$

Relativgeschwindigkeit zwischen x und y.

2.20 Satz. Seien $x, y \in \mathbb{R}^{1,n}$, $z := y - x$, $z \perp\!\!\!\perp x$ und $\varphi := \measuredangle(x, y)$, $v := v(x, y)$. Es seien außerdem x und y zeitartig und im selben Zeitkegel. Dann gilt der *hyperbolische Pythagoras*

$$\|x\|^2 - \|z\|^2 = \|y\|^2 \tag{2.12}$$

und außerdem die Identitäten

$$\|x\| = \|y\| \cosh(\varphi), \tag{2.13}$$
$$\|z\| = \|y\| \sinh(\varphi), \tag{2.14}$$
$$\|x\| = \|y\| \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}. \tag{2.15}$$

Beweis.

- Da $z \in x^{\perp\!\!\!\perp}$ ist gemäß Korollar 2.16 z raum- oder lichtartig, d.h. $[\![z,z]\!] \geq 0$. Da x und y zeitartig sind, gilt

$$\begin{aligned}\|y\|^2 &= -[\![y,y]\!] = -[\![z+x,z+x]\!] \\ &= -[\![z,z]\!] - 2\underbrace{[\![z,x]\!]}_{=0} - [\![x,x]\!] = -\|z\|^2 + \|x\|^2.\end{aligned}$$

- Per Definition gilt

$$\begin{aligned}\cosh(\varphi)\|y\| &\overset{(2.11)}{=} \frac{-1}{\|x\|}[\![x,y]\!] = \frac{-1}{\|x\|}[\![x,z+x]\!] \\ &= \frac{-1}{\|x\|}([\![x,x]\!] + \underbrace{[\![x,z]\!]}_{=0}) = \frac{-1}{\|x\|}[\![x,x]\!] = \frac{\|x\|^2}{\|x\|} = \|x\|.\end{aligned}$$

- Daraus folgt dann

$$\begin{aligned}\|z\|^2 &\overset{(2.12)}{=} \|x\|^2 - \|y\|^2 \overset{(2.13)}{=} \|y\|^2\cosh(\varphi)^2 - \|y\|^2 \\ &= \|y\|^2(\cosh(\varphi)^2 - 1) \overset{(A.2)}{=} \|y\|^2\sinh(\varphi)^2.\end{aligned}$$

- Und schließlich

$$\|x\| \overset{(2.13)}{=} \|y\|\cosh(\varphi) \overset{(A.4)}{=} \|y\|\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

□

3. Beobachter und Teilchen

3.1 Definition (Kurve)**.** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Abbildung $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : I \to \mathbb{R}^n$ heißt *stetig differenzierbar*, falls für alle $1 \leq i \leq n$ gilt: $\gamma_i : I \to \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar. Die Ableitung notiert man dann auch häufig mit $\dot{\gamma}_i$. Die Abbildung

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} : I &\to \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto (\dot{\gamma}_1(t), \dots, \dot{\gamma}_n(t))\end{aligned}$$

heißt *Ableitung von* γ. Eine stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ heißt auch *Kurve*. Ein Element $t \in I$ heißt *Zeitpunkt*.

3.2 Definition (Beobachter)**.** Sei $x, v \in \mathbb{R}^{1,n}$. Eine Kurve der Form

$$\begin{aligned}\gamma : I &\to \mathbb{R}^{1,n} \\ t &\mapsto x + tv\end{aligned}$$

heißt *Materieteilchen*, falls $\dot{\gamma} = v \in I_+(x)$. Eine solche Kurve heißt *Lichtteilchen*, falls $\dot{\gamma} = v \in C_+(x)$ liegt. Eine Kurve heißt *Teilchen*, falls sie ein Materieteilchen oder ein Lichtteilchen ist. In beiden Fällen heißt $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^{1,n}$ die *Weltlinie von* γ. Ein Materieteilchen heißt *frei fallend*, falls $\|\dot{\gamma}\| = \|v\| = 1$.

3.3 Definition (Eigenzeit)**.** Sei $y \in J_+(x)$ ein Ereignis, dann heißt

$$s(x,y) := \|y - x\|$$

Eigenzeit von x nach y.

3.4 Bemerkung. Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^{1,n}$ ein frei fallendes Materieteilchen, d.h. $\gamma(t) = x + tv$. Die Größe $s(\gamma(0), \gamma(t)) = t$ ist die Zeit, die zwischen den Zeitpunkten 0 und t aus Sicht von γ vergangen ist.

3.1. Zwillingsparadoxon

Sei $\gamma : [0, \infty[\to \mathbb{R}^{1,3}$, $t \mapsto te_0$. Dann entspricht γ einem in 0 ruhenden Materieteilchen, welches frei (durch die Zeit) fällt. Seine Geschwindigkeit ist also $\dot{\gamma} = e_0 =: x$. Wir stellen uns γ als einen Zwilling vor. Der andere Zwilling, nennen wir ihn σ, verlässt γ zum Zeitpunk $t = 0$. Wir beschreiben ihn als ein frei fallendes Materieteilchen $\sigma : [0, \infty[\to \mathbb{R}^{1,n}$ mit Geschwindigkeit $\dot{\sigma} =: y$. Wir messen hier die Geschwindigkeit in Vielfachen der Lichtgeschwindigkeit und die Zeit in Jahren. Wir gehen davon aus, dass γ und σ zum Start des Experiments bei $t = 0$ beide 21 Jahre alt sind und dass sich σ mit einer Relativgeschwindigkeit von $v := \frac{24}{25}$ von γ entfernt. Bei $t = 7$ Jahren dreht σ um und bewegt sich erneut als frei fallendes Materieteilchen zurück zu γ, auf das er nach 7 weiteren Jahren trifft. Also beträgt das Alter von σ genau $21 + 7 + 7 = 35$ Jahre. Wie alt ist γ zu diesem Zeitpunkt, d.h. was ist die Eigenzeit von $2 \cdot x$? Die Situation ist in Abschnitt 3.1 dargestellt. Mit Formel (2.15) erhalten wir:

$$\begin{aligned} 2\|x\| &= 2\|y\| \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{14}{\sqrt{1-(\frac{24}{25})^2}} = \frac{14}{\sqrt{\frac{625-576}{625}}} \\ &= \frac{14}{\sqrt{\frac{49}{625}}} = \frac{14}{\frac{7}{25}} = 2 \cdot 25 = 50 \end{aligned}$$

Daher ist also γ zu diesem Zeitpunkt $21 + 50 = 71$ Jahre alt.

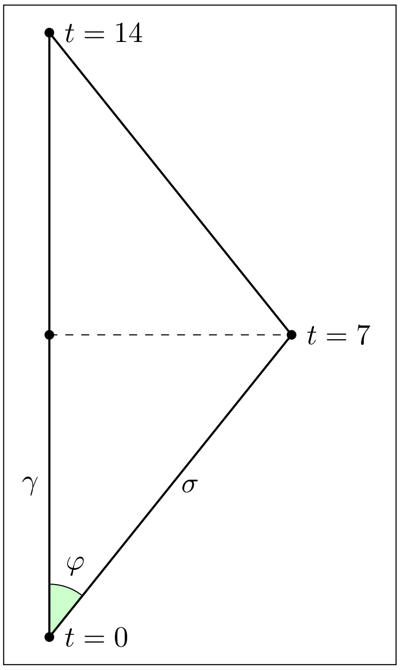

Abbildung 3.5: Das Zwillingsparadoxon

A. Anhang

A.1. Die Wahrheit über Sinus und Cosinus

A.1 Definition (Sinus und Cosinus)**.** Die Abbildungen

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \cos : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

heißen *Sinus* bzw. *Cosinus*.

A.2 Bemerkung. Uns ist schon klar, dass diese Abbildungen in der Schule meistens anders (gar nicht) definiert werden. Wir schreiben die präzise Definition hier nur aus Gründen der Vollständigkeit hin und stellen einige grundlegende Eigenschaften dieser Funktionen zusammen.

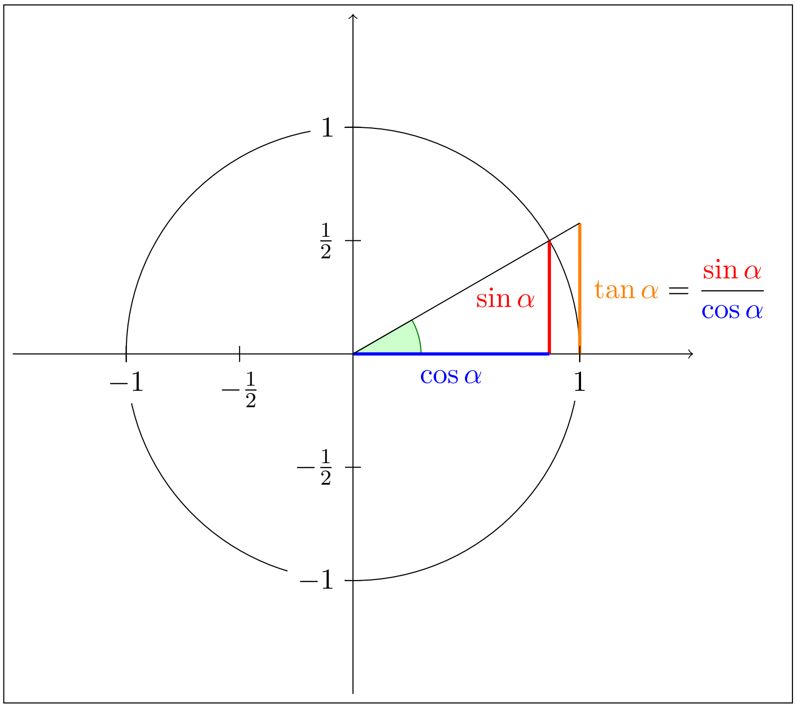

Abbildung A.6: Trigonometrischer Pythagoras

A.3 Satz (Trigonometrischer Pythagoras)**.** Es gilt

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1.$$

A.4 Satz (Additionstheoreme)**.** Es gelten die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \sin(\beta)\cos(\alpha) \end{aligned}$$

A.5 Satz (Eigenschaften Trigonometrischer Funktionen)**.**

(i). Beziehung zur Exponentialfunktion

$$\forall x \in \mathbb{R} : \cos(x) + i\sin(x) = e^{ix}$$

(ii). Trigonometrischer Pythagoras

$$\forall x \in \mathbb{R} : \cos(x)^2 + \sin(x) = 1 \tag{A.1}$$

(iii). Parität

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} : \sin(-x) &= -\sin(x)\\ \cos(-x) &= \cos(x).\end{aligned}$$

Man sagt auch $\sinh$ is *ungrade* und cosh ist *grade*.

(iv). Additionstheoreme

$$\begin{aligned}\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)\\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \sin(\beta)\cos(\alpha)\end{aligned}$$

(v). Umkehrfunktionen Alle trigonometrischen Funktionen besitzen Umkehrfunktionen. Sie sind defniert auf

$$\begin{aligned}\mathrm{arcsin}\colon & [-1,1] \to \mathbb{R}\\ \mathrm{arccos}\colon & [-1,1] \to \mathbb{R}\\ \mathrm{arctan}\colon & \mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ \mathrm{arcccot}\colon & \mathbb{R} \to \mathbb{R}\end{aligned}$$

Diese Funktionen heißen *Arkusfunktionen*.

(vi). Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\sin' &= -\cos\\ \cos' &= \sin\\ \tan' &= \tfrac{1}{\cos^2}\\ \cot' &= -\tfrac{1}{\sin^2}\end{aligned}$$

A.2. Hyperbolische Trigonometrie

A.6 Definition (hyperbolische trigonometrische Funktionen)**.** Die Funktionen

$$\begin{aligned}\sinh : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \tfrac{e^x - e^{-x}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cosh : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \tfrac{e^x + e^{-x}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tanh : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \tfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} \coth : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{\tanh(x)} \end{array}$$

heißen *sinus hyperbolicus*, *cosinus hyperbolicus*, *tangens hyperbolicus* bzw. *cotangens hyperbolicus*. Zusammen nennt man sie die *hyperbolischen trigonometrischen Funktionen*.

A.7 Satz (Eigenschaften Hyperbolischer Funktionen)**.**

(i). Beziehung zur Exponentialfunktion

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \begin{aligned} \cosh(x) + \sinh(x) &= e^x \\ \cosh(x) - \sinh(x) &= e^{-x} \end{aligned}$$

(ii). Hyperbolischer Pythagoras

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1 \tag{A.2}$$

Es gilt übrigens auch:

$$\cosh(x)^2 + \sinh(x)^2 = \cosh(2x).$$

(iii). Parität

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \begin{aligned} \sinh(-x) &= -\sinh(x) \\ \cosh(-x) &= \cosh(x). \end{aligned}$$

Man sagt auch $\sinh$ is *ungrade* und $\cosh$ ist *grade*.

(iv). Additionstheoreme

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \begin{aligned} \sinh(x+y) &= \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y) \\ \cosh(x+y) &= \sinh(x)\sinh(y) + \cosh(x)\cosh(y) \\ \tanh(x+y) &= \frac{\tanh(x)+\tanh(y)}{1+\tanh(x)\tanh(y)} \end{aligned}$$

(v). Umkehrfunktionen Alle hyperbolischen trigonometrischen Funktionen besitzen Umkehrfunktionen. Sie sind gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{arsinh}\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \\ \\ \operatorname{arcosh}\colon [1,\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \\ \\ \operatorname{artanh}\colon]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}\ln(\frac{x+1}{x-1}) \\ \\ \operatorname{arcotanh}\colon]-\infty,-1[\cup]1,\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}) \end{array} \tag{A.3}$$

Diese Funktionen heißen *Area Funktionen*.

(vi). Relationen

$$\forall x \in]-1,1[: \cosh(\operatorname{artanh}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{A.4}$$

(vii). Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \sinh' &= \cosh \\ \cosh' &= \sinh \\ \tanh' &= \tfrac{1}{\cosh^2} \\ \coth' &= -\tfrac{1}{\sinh^2} \end{aligned}$$

(viii). Beziehungen zu trigonometrischen Funktionen

$$\begin{aligned} \cosh(ix) &= \cos(x) \\ \sinh(ix) &= \sin(x) \end{aligned}$$

A.8 Bemerkung. Genauer heißt die Funktion arsinh *area sinus hyperbolicus*.

Aufgabe A.9. Beweise Satz A.7

Index

β-orthogonal, 5

Ableitung von γ, 12
Additionstheoreme, 14

Basis, 6
Beobachter, 12
bilinear, 4
binomische Formel, 3

Cauchy/Schwarz Ungleichung, 4
chronologische Zukunft/Vergangenheit von x, 8

Doppelkegel, 8
Dreiecksungleichung, 4

Eigenzeit, 12
Einheitssphäre, 3
Ereignis, 7
euklidischer Raum, 2

frei fallend, 12

hyperbolischer Winkel, 11

kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$, 5
kausal, 7
kausale Zukunft/Vergangenheit von x, 8
kausaler Charakter, 7
Kausalkegel, 8
Kausalstruktur, 8
Kegel, 8
Kronecker-Delta, 6
Kurve, 12

Länge, 2
lichtartig, 7
Lichtkegel, 8
Lichtteilchen, 12

Materieteilchen, 12
Minkowski-Metrik, 6
Minkowski-Norm, 6
Minkowski-Raum, 6

Norm, 2

orthogonal, 4
Orthonormalbasis, 6

positiv definit, 5
Pseudo-Orthonormalbasis, 6

raumartig, 7
regulär, 5
Relativgeschwindigkeit, 11

Skalarmultiplikation, 2
Skalarprodukt, 2, 5
stetig differenzierbar, 12
symmetrisch, 4

Teilchen, 12

Unterraum, 4

Vektoraddition, 2
Vektoroperationen, 2
Vergangenheit, 8

Weltlinie von γ, 12
Winkel, 3

zeitartig, 7
Zeitkegel, 8
Zeitorientierung, 8
Zeitpunkt, 12
Zukunft, 8
Zukunfts-/Vergangenheitslichtkegel von x, 8
Zwillingsparadoxon, 13

Symbolverzeichnis

$\langle \_, \_ \rangle$	Skalarprodukt, page 2
$x \perp_\beta y$	x steht bezüglich β senkrecht auf y, page 5
$x^{\perp_\beta}$	β-orthogonales Komplement von x, page 5
$C(x)$	Lichtkegel von x, page 8
$C_+(x)$	Zukunftslichtkegel von x, page 8
$C_-(x)$	Vergangenheitslichtkegel von x, page 8
δ_{ij}	Kronecker-Delta von i und j, page 6
e_i	i-ter kanonischer Basisvektor, page 5
$x^{\parallel}$	von x erzeugte Gerade, page 4
$I(x)$	Zeitkegel von x, page 8
$I_+(x)$	chronologische Zukunft von x, page 8
$I_-(x)$	chronologische Vergangenheit von x, page 8
$J(x)$	Kausalkegel von x, page 8
$J_+(x)$	kausale Zukunft von x, page 8
$J_-(x)$	kausale Vergangenheit von x, page 8
$[\![x, y]\!]$	Minkowski-Metrik, page 6
$\mathbb{R}^{1,3}$	Minkowski-Raum, page 6
$x \perp y$	x steht euklidisch senkrecht auf y, page 4
$x^{\perp}$	euklidisches orthogonales Komplement von x, page 4
$\mathbb{R}^n$	euklidischer Raum, page 2
$\mathbb{S}^n$	euklidische Einheitssphäre der Dimension n, page 3
$v(x, y)$	Relativgeschwindigkeit zwischen x und y, page 11
$\measuredangle$	Winkel, page 3
$\measuredangle(x, y)$	euklidischer Winkel zwischen x und y, page 4
$\measuredangle\!\!\measuredangle(x, y)$	hyperbolischer Winkel zwischen x und y, page 11

Abbildungsverzeichnis

1.1. Addition 2
1.2. Der Cosinussatz 3
2.3. Hermann Minkowski, * 22.6.1864, 12.01.1909, deutscher Mathematiker und Physiker . . 7
2.4. Kegel 9
3.5. Das Zwillingsparadoxon 13
A.6. Trigonometrischer Pythagoras 14