Planare Graphen – Der Satz von Kuratowski

Lars A. Wallenborn
lars@wallenborn.net
http://www.wallenborn.net

05. September 2015 – Lehrerfortbilung

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**

2 Planare Graphen **4**

3 Der Plan **7**

4 Planarität impliziert Quasi-Planarität **8**

5 Quasi-Planarität impliziert Planarität **10**

6 Hinweise und Lösungen **14**

Zusammenfassung

Dies ist ein Skript zum gleichnamigen Vortrag, der im Rahmen verschiedener Förderprojekte wie z.B. den Akademien des Landesverbandes Mathematikwettbewerbe NRW e.V. gehalten wurde. Zielgruppe sind interessierte Schüler in der Q1/Q2. Ziel der Einheit ist es unter Annahme der Euler-Formel für planare Graphen, einen vollständigen Beweis des Satzes von Kuratowski zu liefern. Nötige Definitionen werden vorher eingeführt. Dabei soll die mathematisch-formale Herangehensweise demonstriert werden.
Wer Fehler findet oder Verbesserungsvorschläge machen möchte, sende mir bitte eine E-Mail. Ich bin für Kommentare und Feedback vom Tippfehler bis zur Konzeption – insbesondere auch von Schülern – immer dankbar. Das Skript ist online verfügbar und kann daher auch leicht aktualisiert werden. Alle nötigen Adressen stehen oben im Titel.

1 Einleitung

Draw all homeomorphically irreducible trees of size $n = 10$

– Professor Gerald Lambeau, *Good Will Hunting*

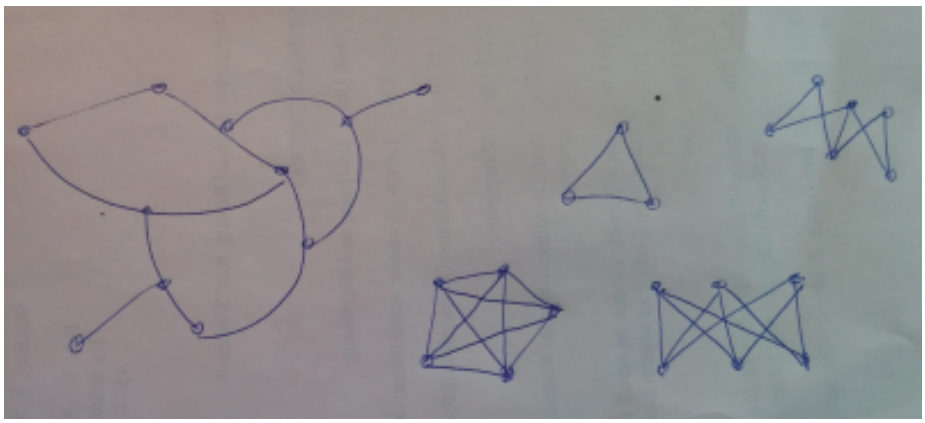
Der erste Teil dieses Skript wird sich mit der Lösung dieser Aufgabe beschäftigen. Laut Film haben dafür ein MIT Professor und seine Kollegen zwei Jahre benötigt. Die größte Herausforderung besteht aber eigentlich nur darin, alle Worte in der Aufgabe zu verstehen.

Definition 1.1 (Graph)**.** Es sei V eine endliche Menge und

$$E \subseteq \{ e \subset V \mid \|e\| = 2 \}$$

also eine Menge von zweielementigen Teilmengen von V. Dann heißt das Paar $G = (V, E)$ *Graph*. Wir nennen V dann auch *Knotemenge* und ihre Elemente $v \in V$ *Knoten* (englisch *v*ertex) und E die *Kantenmenge* und ihre Elemente *Kanten* (englisch *e*dge). In diesem Skript sei immer $n := \|V\|$ und $m := \|E\|$. Wenn mehrere Graphen beteiligt sind, schreiben wir auch manchmal $V(G)$ oder $E(G)$.

Bemerkung 1.2. Diese Definition für Graph ist etwas spezieller als in mancher Literatur. Dort konnen auch noch "gerichtete Graphen", Schleifen und parallele Kanten erlaubt werden. Für unsere Zwecke genügt die oben stehende Definition.



Definition 1.3 (Kantenzug/Pfad/Kreis)**.** Es sei $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, v_i \in V \forall i \in [k+1]$ und $e_i = \{ v_i, v_{i+1} \} \in E \forall i \in [k]$. Dann heißt die (endliche) Folge

$$W := v_1, e_1, v_2, \ldots v_k, e_k, v_{k+1}$$

Kantenzug. Wenn $\forall i \neq j \colon e_i \neq e_j$ heißt W auch *Spaziergang*, wenn $v_1 = v_{k+1}$ gilt *geschlossen*. Wenn gilt $\forall i \neq j \colon v_i \neq v_j$, dann heißt der Graph

$$P := (\{ v_1, \ldots v_k k + 1 \}, \{ e_1, \ldots, e_k \})$$

Pfad und für $x, y \in V(P)$ ist $P_{[x,y]}$ der (eindeutige) Teilpfad von x nach y. Ein geschlossener Pfad heißt *Kreis*.

Aufgabe 1.1. *Zeige:* $\forall v, w \in V$*:*

$$\exists \text{ Kantenzug von } \; v \text{ nach } \; w \Leftrightarrow \exists \text{ Pfad von } \; v \text{ nach } \; w.$$

Definition 1.4 (zusammenhängend / k-zusammenhängend)**.** Ein Graph heißt *zusammenhängend*, wenn es für alle $x, y \in V$ einen x-y-Pfad gibt. Er heißt k-zusammenhängend, wenn er beim Löschen von weniger als k Kanten immer noch zusammenhängend ist.

Definition 1.5. Ein kreisfreier Graph heißt *Wald*. Ein zusammenhängender Wald heißt *Baum*. Ein Teilgraph $H \subseteq G$ heißt *spannend*, wenn $V(H) = V(G)$ gilt.

Aufgabe 1.2. *Zeige, dass jeder Baum mit* n *Knoten genau* $n - 1$ *Kanten hat.*

Definition 1.6. Die Anzahl der Kanten an einem Knoten v heißt *Grad von* v. Wir notieren den Grad mit $\operatorname{grad}(v)$. Die Nachbarn von v notieren wir mit $\Gamma(v)$. Um Unklarheiten zu vermeiden schreiben wir manchmal auch grad_G bzw. Γ_G, um den zugehörigen Graphen G klar zu stellen. Ein Graph heißt *irreduzibel* (engl. "irreducible"), wenn er keinen Knoten von Grad 2 hat.

Aufgabe 1.3 (Handschlaglemma)**.** *Jeder Graph hat eine gerade Anzahl von Knoten ungeraden Grades.*

Das komplizierte Wort "homeomorphically" ist in unserer Situation bedeutungslos: Dies bedeutet nämlich nur, dass es egal ist, *wie* man den Graphen zeichnet (darüber haben wir uns nämlich bisher noch keine Gedanken gemacht, dies wird sich im nächsten Kapitel ändern).

Notation 1.7. Sei G ein Graph und $X \subseteq V(G)$ eine Knotenmenge. Dann ist $G - X$ der Graph, der aus G entsteht, wenn man alle Knoten aus X (und die daran hängenden Kanten löscht). Analog ist für eine Menge Y von zweielementigen Teilmengen von $V(G)$ der Graph $G \cup Y$, der aus G entsteht indem man $E(G)$ mit Y vereinigt.

Als letztes ist eine *Zusammenhangskomponente* eines Graphen eine maximale Menge von Knoten, die paarweise über Wege verbunden sind.

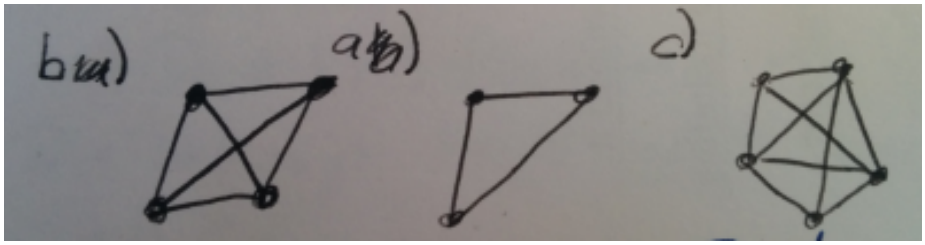
2 Planare Graphen

A planar graph is a graph that can be embedded in the plane.

– Someone, *Wikipedia*

Definition 2.1 (planar)**.** Ein Graph heißt *planar*, wenn man ihn überschneidungsfrei auf ein Blatt Papier zeichnen kann.

Nun drängen sich vielleicht spontan die Frage auf, ob es überhaupt nicht-planare Graphen gibt. Und wenn ja, wie man denn nun genau beweist, dass ein Graph nicht-planar ist (lange probieren und versagen gildet nicht). Wir interessieren uns also auch für Kriterium für Planarität. Gibt es dafür ein notwendiges? Gibt es ein hinreichendes? Gibt es vielleicht sogar ein notwendiges und hinreichendes? Diese Frage wird der Satz von Kuratowski nachhaltig beantworten. Hier einige Beispiele für Graphen, die vielleicht planar sind, vielleicht auch nicht:



Zeichnet man einen planaren Graphen in die Ebene, so ist es möglich seine "Flächen" zu zählen. Hier gibt es eine unbeschränkte Fläche (die "äußere"). Ausserdem gilt für ihre Anzahl die folgende Formel:

Theorem 2.2 (Euler-Formel für planare Graphen)**.** *Die Anzahl der Flächen eines planaren Graphen ist gleich*

$$m - n + 2.$$

Diese Formel wollen wir in diesem Skript nicht beweisen, ein Beweis findet sich aber z.B. in [KV, Theorem 2.3.2., p. 35]. Sie liefer implizit die Tatsache, dass die Anzahl der Flächen eines planaren Graphen unabhängig von der konkreten überschneidungsfreien Zeichnung ist (solch eine Zeichnung nennt man manchmal auch "planaren Einbettung").

Definition 2.3 (Kontraktion und Minor)**.** Es sei $X \subseteq V(G)$, $v' \notin V(G)$ dann heißt

$$G/X := (V', E')$$

mit

$$V' := \{ v \in V \mid v \notin X \} \cup \{ v' \}$$

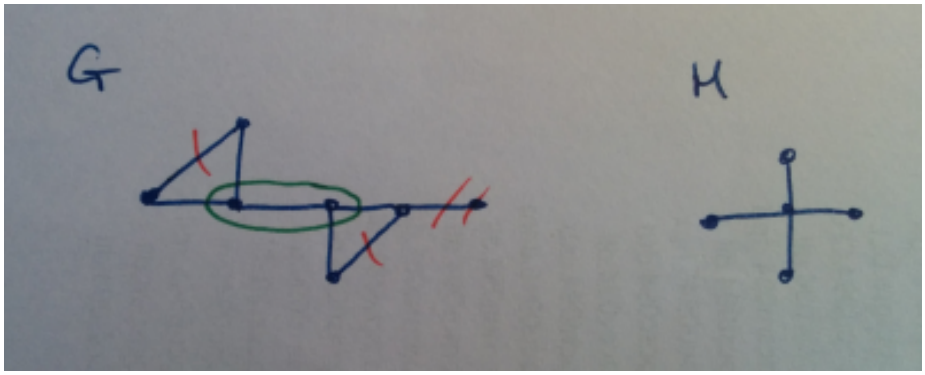
und

$$E' := \{ \{ v, w \} \in E \mid v \in V, w \notin X \} \cup \{ \{ v', w \} \mid w \in \Gamma(X) \}$$

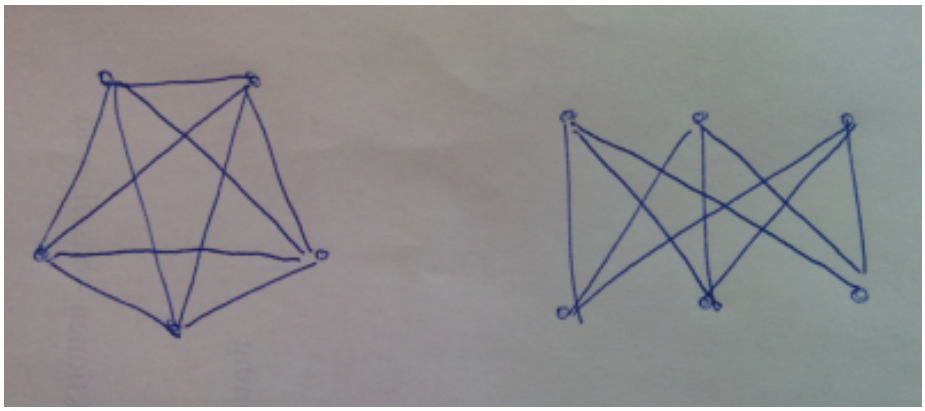
der *aus G durch Kontraktion von X hervorgehende Graph* oder auch kurz *eine Kontraktion von G*. Ein Graph H heißt *Minor (von G)*, wenn er durch eine beliebige Anzahl der folgenden Operationen aus G entsteht:

- Löschen eines Knoten (inkl. aller Kanten),
- Löschen einer Kante,
- Kontrahieren einer Knotenmenge.

Informell ausgedrückt, wählt man bei einer Kontraktion eine Knotenmenge im Graphen aus und ersetzt sie durch einen neuen Knoten (und erhält dabei die Kanten).



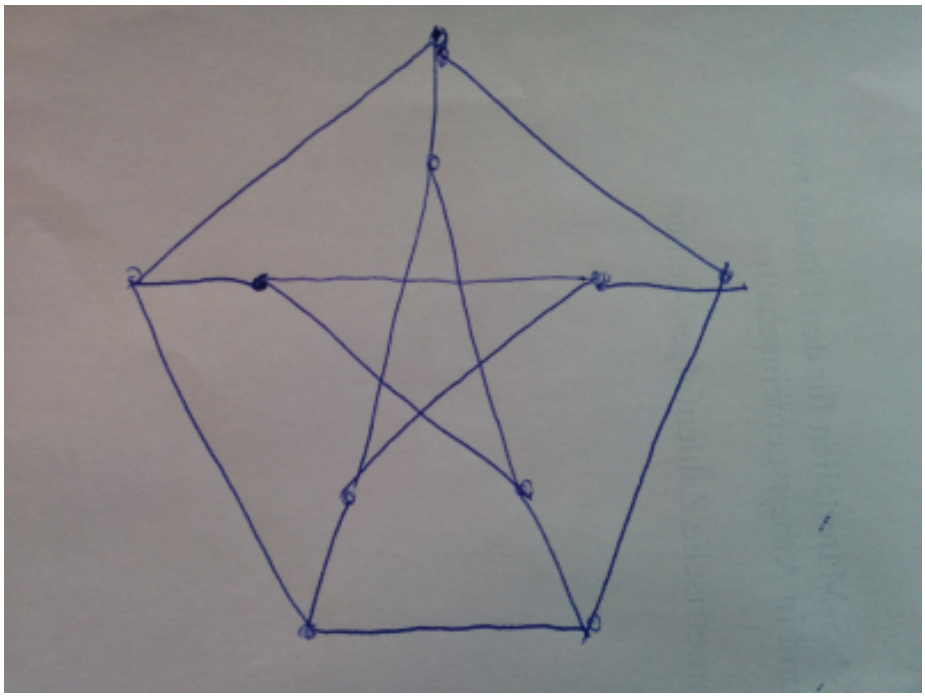
Definition 2.4 (Bipartit, Vollständigkeit, K_n und $K_{n,m}$)**.** Ein Graph heißt *bipartit*, wenn seine Kantenmenge in zwei Mengen zerfällt, innerhalb derer es jeweils keine Kanten gibt. Ein Graph heißt *vollständig*, wenn er möglichst viele Kanten hat. Für $n \in \mathbb{N}$ notieren wir den vollständigen Graphen auf n Knoten mit K_n. Für $n, m \in \mathbb{N}$ notieren wir den vollständigen bipartiten Graphen auf $n + m$ Knoten mit $K_{m,n}$.



Aufgabe 2.1. *Wie viele Kanten hat K_n? Wie viele hat $K_{n,m}$?*

Definition 2.5. Ein Graph heißt *quasi-planar*, wenn er weder K_5 noch $K_{3,3}$ als Minor hat.

Aufgabe 2.2. *Ist der Petersen-Graph quasi-planar?*



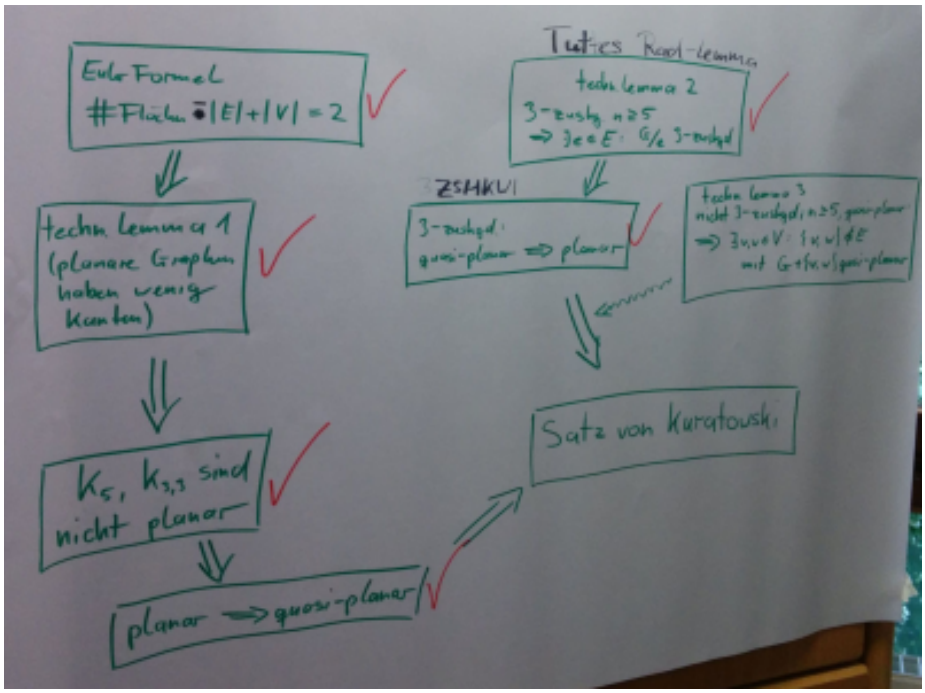
3 Der Plan

„Ich liebe es, wenn ein Plan funktioniert!

– John Hannibal Smith, *A-Team*

Theorem 3.1 (Kuratowski)**.** *Ein Graph ist genau dann planar, wenn er quasi-planar ist.*

Die Beweisstrategie wollen wir in folgendem Diagramm veranschaulichen:



Einige Symbole und Begriffe darin mögen zu diesem Zeitpunkt noch nicht bekannt sein. Dies wird sich aber im Laufe diess Skriptes ändern.

4 Planarität impliziert Quasi-Planarität

Fakt 4.1. *Jeder Minor eines planaren Graphen ist planar.*

Die Aussagenlogische Umkehrung davon ist: Hat ein Graph einen nicht-planaren Minor, so ist er nicht planar. Würden wir also zeigen, dass K_5 und $K_{3,3}$ nicht planar sind, so hätten wir bereits gezeigt, dass Planarität quasi-Planarität impliziert. Um die Gegenrichtung geht es im nächsten Kapitel.

Definition 4.2. Der *Umfang* eines Graphen ist die Länge eines kürzesten Kreises.

Lemma 4.3. *Es sei G ein 2-zusammenhängender, planarer Graph mit Umfang k. Dann gilt*

$$m \leq (n-2)\frac{k}{k-2}.$$

Beweis. Es sei r die Anzahl der Flächen von G. Da jede Fläche durch einen Kreis begrenzt ist bemerken wir zuerst, dass $rk \leq 2m$ gilt. Dies formen wir um zu $r \leq 2\frac{m}{k}$ und die Eulerformel liefert:

$$\begin{aligned}
& r - m + n &=& \; 2 \\
\Leftrightarrow \quad & 2 + m - n = r &\leq& \; 2\tfrac{m}{k} \\
\Leftrightarrow \quad & m - 2\tfrac{m}{k} &\leq& \; n-2 \\
\Leftrightarrow \quad & m\left(1 - \tfrac{2}{k}\right) &\leq& \; n-2 \\
\Leftrightarrow \quad & m &\leq& \; (n-2)\,\tfrac{k}{k-2}
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.4. *Jeder planare Graph mit mehr als 2 Knoten hat maximal $3n-6$ Kanten.*

Beweis. Sei G ein planarer Graph mit mehr als 2 Knoten. Füge solange Kanten hinzu, bis die Planarität zerstört würde. Der resultierende Graph hat Umfang 3 und ist 2-zusammenhängend. Mit Lemma 4.3 folgt

$$m \leq (n-2)\,\frac{3}{3-2} = 3\,(n-2)\,.$$

□

Korollar 4.5. *K_5 und $K_{3,3}$ sind nicht planar.*

Beweis. Die folgende Rechnungen zeigen, dass die Gleichung aus Lemma 4.4 nicht erfüllt ist:

$$\begin{aligned}
E\,(K_5) = 10 \quad &> \quad 3(V\,(K_5) - 2) = 3 \cdot 3 = 9 \\
E\,(K_{3,3}) = 9 \quad &> \quad (n-2)\tfrac{k}{k-2} = 4 \cdot \tfrac{4}{2} = 8
\end{aligned}$$

□

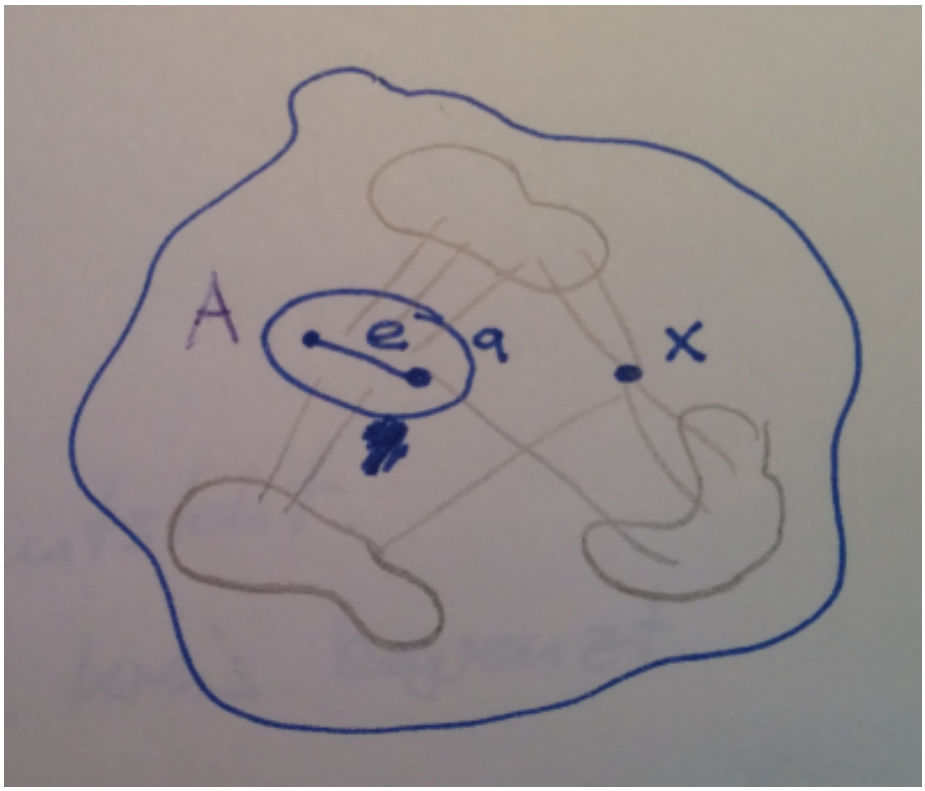
Wir fassen also zusammen: “Minor bilden” erhält die Planaritäts-Eigenschaft. K_5 und $K_{3,3}$ sind nicht planar. Findet man also einen dieser beiden Graphen als Minor, so konnte der ursprüngliche Graph nicht planar gewesen sein.

5 Quasi-Planarität impliziert Planarität

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der Rückrichtung des im vorherigen Kapitels behandelten Satzes beschäftigen. Wir wollen also zeigen, dass quasi-Planarität auch Planarität impliziert. Dazu benötigen wir drei (etwas technische) Lemmas.

Lemma 5.1 (Tuttes Rad-Lemma)**.** *Sei G ein 3-zusammenhängender Graph mit $n \geq 5$. Dann gibt es eine Kante $e \in E(G)$ mit der Eigenschaft, dass auch G/e 3-zusammenhängend ist.*

Beweis. Diesen Beweis führen wir durch Widerspruch. Nehmen wir also an, dass $\forall e = \{v, w\} \in E(G)$ gelte, dass G/e nicht 3-zusammenhängend ist. Dieses bedeutet im Detail, dass es eine höchstens zweielementige Menge $A \subset V(G/e)$ gibt, sodass $G/e - A$ unzusammenhängend ist. Da G 3-zusammenhängend ist, muss der durch Kontraktion von e entstandene Knoten a in A sein (da sonst schon $G - A$ unzusammenhängend wäre).



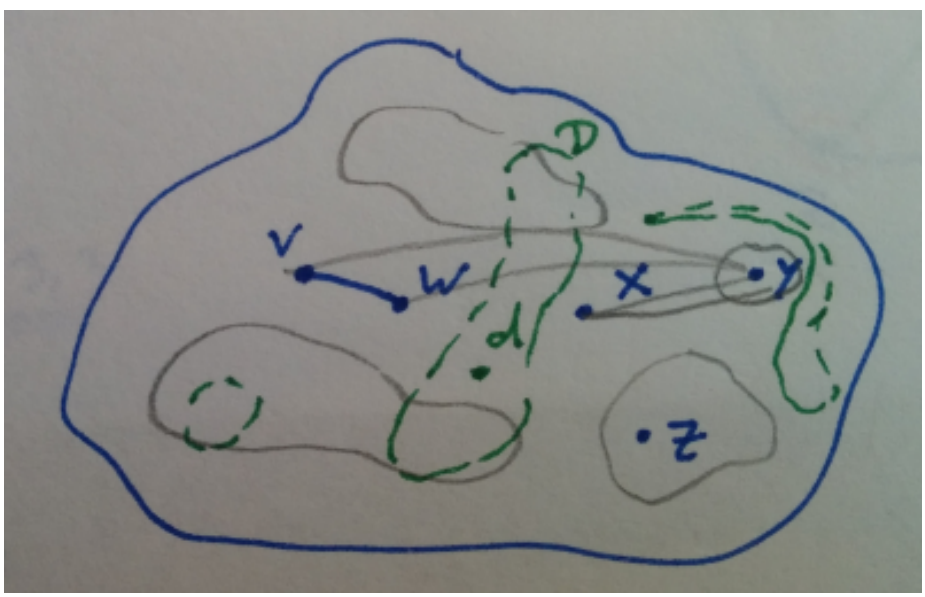
Wir untersuchen nun die beiden unerwarteten Fälle für die Kardinalität von A (bei endlichen Mengen ist "Kardinalität" einfach nur ein edler Ausdrück für "Anzahl Elemente"):

$|A| = 1$ damit wäre $G/e - A$ unzusammenhängend. Da $A = \{a\}$ nur ein Element

enthält, gilt also, dass $G/e - \{a\}$ unzusammenhängend ist. Also wäre auch $G - \{v, w\}$ unzusammenhängend. Dies steht aber im Widerspruch zum 3-Zusammenhang von G.

$|A| = 0$ dies ist wegen $\varnothing \neq e \subseteq A$ nicht möglich.

Von nun an können wir also annehmen, dass $|A| = 2$ und $a \in A$ gilt. Also existiert ein $x \in V(G)$, sodass $A = \{a, x\}$ gilt. Daraus muss nach Voraussetzung (die wir zum Widerspruch führen wollen) $G/e - \{a, x\}$ unzusammenhängend sein. Dies würde bedeuten, dass $G - \{v, w, x\}$ unzusammenhängend ist. Also gibt es eine Zusammenhangskomponente C von $G - \{v, w, x\}$ mit $|V(C)| < |V(G)| - 3$. Wähle nun e, x und C sodass $|V(C)|$ minimal ist. x muss einen Nachbarn y in C haben, da sonst C schon eine Zusammenhangskomponente von $G - \{v, w\}$ wäre, G aber 3-zusammenhängend ist. Nach der Voraussetzung (die wir zum Widerspruch führen wollen) ist aber $G/\{x, y\}$ nicht 3-zusammenhängend. Damit gibt es dann, wie oben, $z \in V(G)$ so, dass $G - \{x, y, z\}$ unzusammenhängend ist. Da $\{v, w\} \in E(G)$ gibt es eine Zusammenhangskomponente D von $G - \{x, y, z\}$ mit $v, w \notin V(D)$. Nun hat wiederum y einen Nachbarn $d \in V(D)$, da sonst $G - \{x, z\}$ schon unzusammenhängend wäre. Daraus folgt, dass $d \in V(D) \cap V(C)$ ist und damit $D \subseteq C$. Dies steht aber im Widerspruch zu $y \in V(C) \setminus V(D)$.

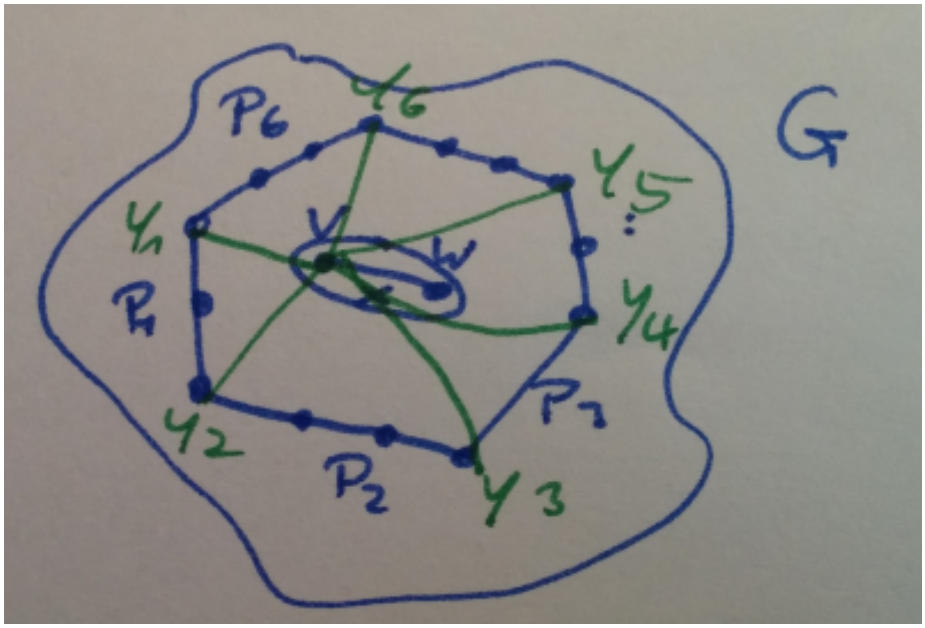


□

Dieses Lemma sagt also aus, dass es in jedem jeden (nicht zu kleinen) Graphen eine Kante gibt, die bei Kontraktion den 3-Zusammenhang erhält

Lemma 5.2 (Kuratowski für 3-zusammenhängende Graphen)**.** *3-zusammenhängende quasi-planare Graphen sind planar.*

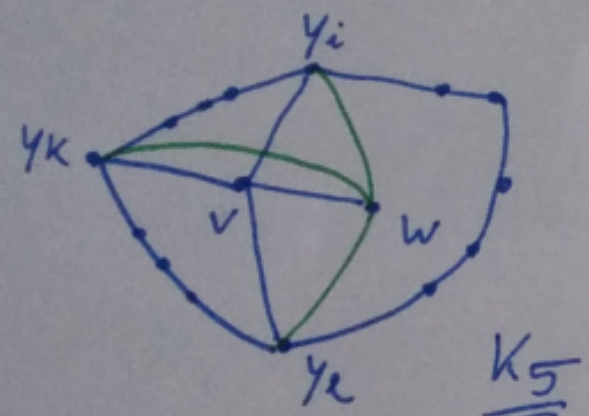
Beweis. Dies beweisen wir über Induktion nach $|V|$. Als Induktionsanfang betrachten wir den Fall $|V| = 4$: Da G 3-zusammenhängend ist, muss $G = K_4$ gelten und dieser ist planar. Sei nun also $|V| > 4$. Wähle $e = \{v, w\} \in E(G)$ sodass G/e noch 3-zusammenhängend ist (so ein e existiert nach Lemma 5.1). Da $|V(G/e)| < |V(G)|$, ist nach Induktionsvoraussetzung G/e planar. Sei nun x der Knoten in G/e, der durch Kontraktion von e entsteht. Da G/e 3-zusammenhängend ist, ist $G/e - x$ noch 2-zusammenhängend und damit ist jede Fläche von G/e durch einen Kreis begrenzt. Insbesondere die Fläche, die x enthält, nennen wir diesen Kreis C. Es seien $y_1, \ldots, y_k \in V(G)$ die Nachbarn von v in G (die nicht w) sind im Uhrzeigersinn nummeriert. Weiter sei für $1 \leq i \leq k$, P_i der $y_i - y_{i+1}$-Pfad auf C (wobei für die einfache Schreibeweise $y_{k+1} := y_1$ sei).



Angenommen es gebe ein i sodass $\Gamma(w) \subseteq \{v\} \cup V(P_i)$ gilt. Dann wären wir fertig, weil wir eine planare Einbettung gefunden haben. Die anderen Fälle schließen wir nun darüber aus, dass wir K_5 oder $K_{3,3}$ finden würden (was der Quasi-Planarität widerspräche):

Sonst:

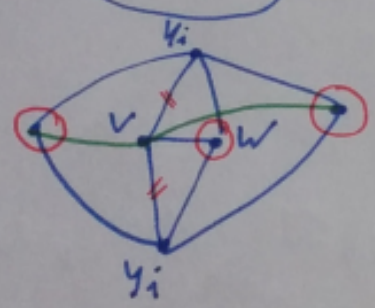
1) $|\Gamma(w) \cap \{y_1, \dots, y_k\}| = 3$



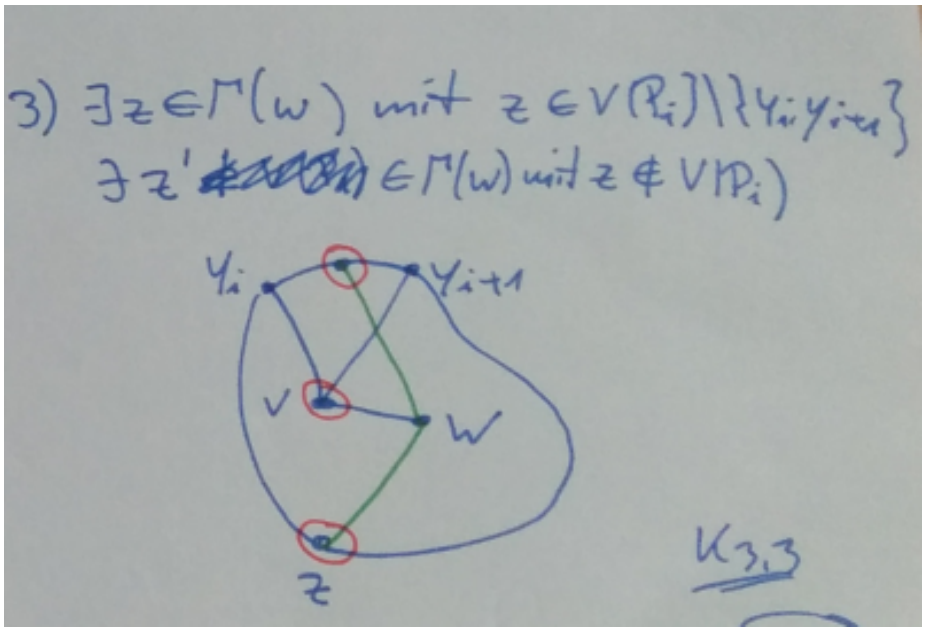
K_5

2) $\Gamma(w) = \{v, y_i, y_j\}, i < j$

$\Rightarrow$ $i < j+1$, $(i,j) \neq (1,k)$ da sonst y_i, y_j auf einem Pk läge



$K_{3,3}$



□

Lemma 5.3 (Technisches Lemma)**.** *Für nicht* 3*-zusammenhängende quasi-planarer Graph mit* $n \geq 5$ *gilt:*

$$\exists v, w \in V : \{v, w\} \notin E \text{ mit } G + \{v, w\} \text{ ist quasi-planar.}$$

Diess Lemma sagt also aus, dass man in einem noch nicht 3-zusammenhängenden (nicht zu kleine) Graphen immer ein unverbundendenes Paar von Knoten finden kann, sodass das Hinzufügen einer Kante zwischen den beiden Knoten die quasi-Planarität erhält. Damit verallgemeinert sich Lemma 5.2 zum Haupttheorem 3.1 dieses Skriptes.

6 Hinweise und Lösungen

Tip zu Aufgabe 1.2 Entferne ein Blatt und verwende Induktion.

Tip zu Aufgabe 1.3 Zeige zuerst, dass die Summe der Grade aller Knoten $2m$ ist.

Literatur

[KV] Bernhard Korte, Jens Vygen, „Combinatorial Optimization“, Springer-Verlag Berlin; third edition, ISBN-10 3-540-25684-9, ISBN-13 978-3-540-25684-7