Quaternionen, Kampfflugzeuge und Computerspiele

Nikolai Nowaczyk <mail@nikno.de> http://math.nikno.de/
Lars Wallenborn <lars@wallenborn.net> http://www.wallenborn.net/

29.06.-05.07. 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen **3**
1.1 Axiomatik reeller Zahlen . . . 3
1.2 Vektorrechnung . . . 4
1.3 Komplexe Zahlen . . . 6
1.4 Matrizenrechnung . . . 7

2 Quaternionen **9**
2.1 Definition durch komplexe Matrizen . . . 9
2.2 Definition im $\mathbb{R}^4$ . . . 12
2.3 Real- und Imaginärteil . . . 13
2.4 Zentrum, Konjugation, Norm . . . 15

3 Rotationen **19**
3.1 Drehungen im Raum . . . 19
3.2 Quaternionen und räumliche Drehungen . . . 21

4 Kampfflugzeuge **24**
4.1 Euler-Winkel . . . 24
4.2 Gimbal Lock . . . 25

5 Computerspiele **26**
5.1 Zeitkomplexität . . . 26
5.2 Weitere Aspekte . . . 27

Index **28**

Symbolverzeichnis **30**

1 Grundlagen

1.1 Axiomatik reeller Zahlen

1.1 Definition (Gruppe)**.** Eine Menge G heißt *Gruppe*, falls gilt:

E xistenz einer Inneren Verknüpfung: Es gibt eine Abbildung $\circ : G \times G \to G$, sodass folgendes gilt:

A ssoziativität:

$$\forall x, y, z \in G : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

N eutrales Element:

$$\exists e \in G : \forall x \in G : x \circ e = e \circ x = x$$

I nverse Elemente:

$$\forall x \in G : \exists y \in G : x \circ y = e = y \circ x.$$

Der Klarheit halber sagt man dann auch, das Tupel $(G, \circ, e)$ ist eine Gruppe. Eine Gruppe heißt *abelsch*, falls zusätzlich gilt:

K ommutativität

$$\forall x, y \in G : x \circ y = y \circ x.$$

1.2 Definition (Gruppenhomomorphismus)**.** Seien $(G, \circ_G, e_G)$ und $(H, \circ_H, e_H)$ zwei Gruppen und $f : G \to H$ eine Abbildung. Dann heißt f *Gruppenhomomorphismus*, falls gilt:

$$\forall x, y \in G : f(x \circ_G y) = f(x) \circ_H f(y).$$

1.3 Bemerkung. Spätens jetzt sieht man, wieso man die Gruppenverknüpfung in der Notation meist ganz weglässt. Dann sieht obige Gleichung nämlich schon viel angenehmer aus

$$\forall x, y \in G : f(xy) = f(x)f(y).$$

1.4 Definition (Kern)**.** Sei $f : (G, \circ_G, e_G) \to (H, \circ_H, e_H)$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann heißt

$$\ker f := \{g \in G \mid f(g) = e_H\} = f^{-1}(e_H)$$

der *Kern* von f.

Mit Gruppen kann man sich ein ganzes Leben lang beschäftigen. Wir führen dieses Konzept zunächst nur ein, um kurz und knapp nocheinmal daran zu erinnern, wie die Rechenregeln für reelle Zahlen $\mathbb{R}$ lauten:

1.5 Axiom (Reelle Zahlen)**.** Die rellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, 0, \cdot, 1)$ erfüllen folgende *Axiome* ("Rechenregeln")

- $(\mathbb{R}, +, 0)$ ist eine abelsche Grupppe.
- $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ ist eine abelsche Grupppe.

- Distributivität:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

Man beachte, dass aus der Tatsache, dass $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ eine Gruppe ist, insbesondere folgt, dass $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und somit insbesondere $1 \neq 0$ gilt.
Man nennt allgemein eine Menge K versehen mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, die obige Regeln erfüllen, einen *Körper* und schreibt dann, wenn man pingelig ist, auch $(K, +, 0, \cdot, 1)$.

1.6 Bemerkung. Man kann alle anderen "Rechenregeln", die man üblicherweise verwendet, aus diesen Axiomen herleiten. Es gibt auch noch mehr Axiome, die z.B. die Anordnung $<$ regeln, aber damit wollen wir uns jetzt nicht beschäftigen.

1.2 Vektorrechnung

1.7 Definition ($\mathbb{R}^n$)**.** Man nennt

$$\mathbb{R}^n := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

den *n-dimensionalen euklidischen Raum* oder auch den "R hoch n". Ein Element $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ heißt *Vektor* und $x_1, \ldots, x_n$ seine *Koordinaten.* Die Physiker machen kleine Pfeile über ihre Vektoren, z.B. $\vec{x}$. Wir nicht.
Wichtigster Anwendungsfall ist der $\mathbb{R}^2$ (die euklidische Ebene), der $\mathbb{R}^n$ (der euklidische Raum) und später auch der $\mathbb{R}^4$ (der euklidische Hyperraum).

1.8 Definition (Vektoroperationen)**.** Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind folgende Operationen definiert.

Addition

$$x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Skalarmultiplikation

$$\lambda x := \lambda \cdot x := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \in \mathbb{R}.$$

Norm/Länge

$$|x| := \sqrt{\langle x, x \rangle}. \tag{1.1}$$

Kreuzprodukt Nur für $n = 3$ definieren wir außerdem

$$x \times y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

1.9 Definition (Einheitssphäre)**.** Die Menge

$$\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$$

heißt *Einheitssphäre der Dimension n*

1.10 Definition (Winkel)**.** Für zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x, y \neq 0$, heißt

$$\measuredangle(x, y) := \arccos\left(\frac{\langle x, y\rangle}{|x||y|}\right) \tag{1.2}$$

Winkel zwischen x und y. Dabei sei daran erinnert, dass $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$, also $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$. Wir messen Winkel also immer im Bogenmaß.
Man sagt, dass x und y *senkrecht aufeinander stehen*, in Zeichen $x \perp y$, falls gilt

$$\measuredangle(x, y) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{oder äquivalent} \qquad \langle x, y\rangle = 0.$$

1.11 Bemerkung. Häufig findet man die den Winkel definierende Gleichung auch in der Form

$$\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\| \cos\left(\measuredangle(x, y)\right). \tag{1.3}$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu (1.2).

1.12 Satz (Additionstheoreme)**.** Es gelten die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \sin(\beta)\cos(\alpha) \end{aligned}$$

Daraus folgen die Verdopplungsformeln

$$\begin{aligned} \cos(2\alpha) &= \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2 = 2\cos(\alpha)^2 - 1 = 1 - 2\sin(\alpha)^2), \\ \sin(2\alpha) &= 2\sin(\alpha)\cos(\alpha). \end{aligned} \tag{1.4}$$

1.13 Satz (Eigenschaften des Kreuzproduktes)**.** Es seien $w, x, y, z \in \mathbb{R}^3$

(i). Anti-Kommutativität:

$$x \times y = -y \times x. \tag{1.5}$$

(ii). Orthogonalität:

$$x \times y \perp x \qquad \text{und} \qquad x \times y \perp y. \tag{1.6}$$

(iii). Winkelformel:

$$x \times y = \|x\|\|y\| \sin(\measuredangle(x, y))n, \qquad \text{wobei} \qquad n := n(x, y) := \frac{x \times y}{\|x \times y\|}. \tag{1.7}$$

(iv). Dreierformel:

$$(x \times y) \times z = \langle x, z\rangle y - \langle y, z\rangle x \tag{1.8}$$

(v). Jacobi-Identität: Das Kreuzprodukt ist nicht assoziativ, aber es gilt

$$(x \times y) \times z + (y \times z) \times x + (z \times x) \times y = 0.$$

(vi). Tripelprodukt:

$$(x \times y) \times (x \times z) = \langle x, y \times z \rangle x$$

(vii). Lagrange-Identität:

$$\langle w \times x, y \times z \rangle = \langle w, y \rangle \langle x, z \rangle - \langle x, y \rangle \langle w, z \rangle.$$

Insbesondere gilt

$$|w \times x|^2 = |w|^2 |x|^2 - \langle w, x \rangle^2.$$

(viii). Spatprodukt:[1]

$$\langle x, y \times z \rangle = \langle y, z \times x \rangle = \langle z, x \times y \rangle = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Alle Aussagen lassen sich durch grauenhafte Rechnungen beweisen. □

1.3 Komplexe Zahlen

1.14 Definition (komplexe Zahlen)**.** Definiere $(\mathbb{C}, +) := (\mathbb{R}^2, +)$ und folgende Multiplikation:

$$\begin{array}{rcl} \cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 y_1 - x_2 y_2 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Außerdem setzen wir

$$\mathbf{1} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad i := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1.15 Satz. Die komplexen Zahlen $(\mathbb{C}, +, \mathbf{0}, \cdot, \mathbf{1})$ sind ein Körper!

Aufgabe 1.16. Sei $z \in \mathbb{C}$ und $z \neq 0$. Finde eine einfache Formel für z^{-1}.

1.17 Bemerkung. Man schreibt eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ daher auch:

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = z_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = z_1 \cdot \mathbf{1} + z_2 \cdot i = z_1 + i z_2$$

Man kann übrigens eine relle Zahl $x \in \mathbb{R}$ auffassen als eine komplexe Zahl

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = x + 0 \cdot i \in \mathbb{C}.$$

1.18 Definition (Real- und Imaginärteil)**.** Für eine komplexe Zahl $z = z_1 + i z_2$ sagt man auch, dass

$$z_1 := \mathrm{Im}(z), \qquad z_2 := \mathrm{Re}(z)$$

der *Realteil!einer komplexen Zahl* bzw der *Imaginärteil!einer komplexen Zahl* von z sind. Diese definieren Funktionen

$$\mathrm{Re}, \mathrm{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}.$$

[1] Wer die Determinantenfunktion det noch nicht kennt, möge sich das letzte Gleichheitszeichen einfach wegdenken und sich merken, dass die Zahlen auf der linken Seite genau dann 0 sind, falls x, y, z linear abhängig sind.

1.19 Bemerkung. Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist genau dann Null, wenn ihr Real- und ihr Imaginärteil Null ist.

1.20 Definition (komplexe Konjugation)**.** Zu jeder komplexen Zahl $z = z_1 + iz_2$ nennt man die Zahl $\bar{z} := z_1 - iz_2$ das *komplex Konjugierte von* z. Dies definiert eine Funktion

$$\bar{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,.$$

1.21 Definition (Betrag)**.** Als Menge ist ja $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ und auf $\mathbb{R}^2$ haben wir eine Norm definiert, siehe eq. (1.1). Also haben wir auch auf $\mathbb{C}$ eine Norm und diese nennt man den *komplexen Betrag.* Man schreibt ihn so:

$$\begin{array}{rcl} |_| : \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ z = z_1 + iz_2 & \mapsto & |z| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} \end{array}$$

1.22 Satz (Eigenschaften von Konjugation und Betrag)**.**

(i). Zeige, dass der komplexe Betrag *multiplikativ* ist, d.h.

$$\forall z, z' \in \mathbb{C} \,:\, |zz'| = |z||z'| \tag{1.9}$$

(ii). Zeige, dass die komplexe Konjugaktion *additiv* ist, d.h.

$$\forall z, z'\mathbb{C} \,:\, \overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}.$$

(iii). Zeige, dass gilt:

$$\forall z \in \mathbb{C} \,:\, z\bar{z} = |z|^2. \tag{1.10}$$

(iv). Es gilt für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Longleftrightarrow z = \bar{z}.$$

Aufgabe 1.23. Beweise obigen Satz.

1.4 Matrizenrechnung

In diesem Kapitel ist $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Wenn man das verwirrend findet, dann sollte man einfach so tun als wäre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1.24 Definition (Matrix)**.** Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Eine $m \times n$ *Matrix* A ist ein zweidimensionales Tupel $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,m, j=1,\dots,n}$ aus Zahlen $a_{ij} \in \mathbb{K}$. Die Menge aller solchen Matrizen schreibt man auch als $\mathbb{K}^{m\times n}$. Man nennt die a_{ij} auch die *Einträge* der Matrix A.

1.25 Definition (Matrixaddition)**.** Seien $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Dann heißt die Matrix $C := A + B \in \mathbb{K}^{m\times n}$, deren Einträge definiert sind durch

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Summe von A und B.

1.26 Definition (Skalarmultiplikation)**.** Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $c \in \mathbb{K}$. Dann ist $B := cA \in \mathbb{K}^{m\times n}$ die Matrix mit den Einträgen

$$b_{ij} = ca_{ij}.$$

Diese Art von Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl heißt *Skalarmultiplikation.*

1.27 Definition (Matrixmultiplikation)**.** Für zwei Matrizen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n\times k}$ ist das Produkt $C := AB \in \mathbb{K}^{m\times k}$ die Matrix, deren Einträge definiert sind durch

$$c_{ij} := \sum_{\nu=1}^{m} a_{i\nu} b_{\nu j}.$$

1.28 Definition (Einheitsmatrix)**.** Die Matrix $E \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit den Einträgen

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

heißt *Einheitsmatrix.* Streng genommen ist das für jedes n eine andere Matrix. Wollen wir das in der Notation unterscheiden, schreiben wir E_n.

1.29 Definition (Nullmatrix)**.** Die Matrix $0 \in \mathbb{K}^{n\times n}$, deren Einträge ausschließlich aus Nullen besteht, heißt *Nullmatrix* und wird etwas schlampig ebenfalls mit 0 bezeichnet (obwohl dies eigentlich für unterschiedliches n unterschiedliche Matrizen sind).

1.30 Satz (Rechenregeln für Matrizen)**.** Es gelten folgende Regeln für das Rechnen mit Matrizen: Seien $A, B, C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $a, b \in \mathbb{K}$ gilt:

(i). $(A + B) + C = A + (B + C)$

(ii). $A + 0 = A$

(iii). $A + (-A) = 0$, wobei $-A := (-1)A$.

(iv). $A + B = B + A$.

(v). $(ab)A = a(bA)$.

(vi). $1A = A$

(vii). $(a + b)A = aA + bA$.

(viii). $a(A + B) = aA + aB$.

(ix). $A(BC) = (AB)C$.

Man sagt auch *der* $\mathbb{K}^{n\times n}$ *ist eine* $\mathbb{K}$*-Algebra* (aber keinen Körper).

Aufgabe 1.31. Beweise so viele Teile des obigen Satzes, bis du keine Lust mehr hast.

1.32 Definition (invertierbar)**.** Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt *invertierbar*, falls es eine Matrix $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gibt, sodass

$$AB = BA = E.$$

Man schreibt dann auch $A^{-1} := B$. Die Menge aller invertierbaren Matrizen notieren wir mit $\mathrm{GL}(n)$. Das steht für *General Linear Group.*

1.33 Satz (Ausrechnen des Inversen)**.** Sei $A \in \mathrm{GL}(n)$. Dann lässt sich die Inverse A^{-1} durch das so genannte *simultane Gauß-Verfahren* ausrechnen

$$\begin{pmatrix} A & E \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} E & A^{-1} \end{pmatrix}$$

1.34 Satz (Determinante)**.** Es gibt eine Funktion $\det : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$, genannt *Determinante* mit der Eigenschaft, dass

$$\forall A \in \mathbb{K}^{n\times n} : A \in \mathrm{GL}(n) \Longleftrightarrow \det(A) \neq 0.$$

Diese Funktion hat außerdem folgende Eigenschaften:

(i). $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

(ii). $\det(cA) = c^n \det(A)$, $c \in \mathbb{K}$,

(iii). $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$,

(iv). $\det(A) = \det(A^t)$

Theoretisch kann man die Determinante einer Matrix immer konkret ausrechnen. Es gilt nämlich für $n = 2$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \tag{1.11}$$

und für allgemeines $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ die rekursive Vorschrift

$$\forall 1 \leq j \leq n : \det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}),$$

wobei $A_{ij} \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix ist, die aus A durch Streichung der i-ten Zeile und der j-ten Spalte hervorgeht.

1.35 Satz (Inverse von 2×2-Matrizen)**.** Für ein $A \in \mathrm{GL}(2)$ gibt es eine besonders schöne Formel für das Inverse

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2) \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1.36. Zeige, dass die so definierte Formel tatsächlich ein Inverses für A liefert.

2 Quaternionen

In diesem Kapitel führen wir die Quaternionen ein. Es gibt viele verschiedene Möglichkeiten die Quaternionen zu definieren, die letztendlich alle äquivalent sind. Wir stellen hier exemplarisch drei sehr bekannte Definitionen vor.

2.1 Definition durch komplexe Matrizen

2.1 Definition (Quaternionen)**.** Definiere

$$\mathbb{H} := \{q_0\,\mathrm{E} + q_1\,\mathrm{I} + q_2\,\mathrm{J} + q_3\,\mathrm{K} \mid q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}^{2\times 2},$$

wobei

$$\mathrm{E} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{I} := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{J} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{K} := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

2.2 Lemma (Eindeutigkeit der Darstellung)**.** Jedes Quaternion $q \in \mathbb{H}$ hat genau eine Darstellung der Form

$$q = q_0\,\mathrm{E} + q_1\,\mathrm{I} + q_2\,\mathrm{J} + q_3\,\mathrm{K}\,.$$

Beweis. Per Definition hat jedes $q \in \mathbb{H}$ eine solche Darstellung. Wir müssen uns also nur davon überzeugen, dass diese Darstellung eindeutig ist. Angenommen, es gilt

$$q = q_0\,\mathrm{E} + q_1\,\mathrm{I} + q_2\,\mathrm{J} + q_3\,\mathrm{K} = q_0'\,\mathrm{E} + q_1'\,\mathrm{I} + q_2'\,\mathrm{J} + q_3'\,\mathrm{K},$$

dann folgt

$$0 = (q_0 - q_0')\,\mathrm{E} + (q_1 - q_1')\,\mathrm{I} + (q_2 - q_2')\,\mathrm{J} + (q_3 - q_3')\,\mathrm{K}\,.$$

Wir wollen nun zeigen, dass $q_\nu - q_\nu' = 0$, $\nu = 0, 1, 2, 3$. Dafür ist es hinreichend zu zeigen, dass wann immer eine Gleichung der Form

$$0 = x_0\,\mathrm{E} + x_1\,\mathrm{I} + x_2\,\mathrm{J} + x_3\,\mathrm{K}\,.$$

gilt, dass daraus folgt $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Setzt man in diese Gleichung die Definition von $\mathrm{E}, \mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K}$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_0 & 0 \\ 0 & x_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ix_1 & 0 \\ 0 & -ix_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x_2 \\ -x_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & ix_3 \\ ix_3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_0 + ix_1 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_3 & x_0 - ix_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Daraus folgt, dass insbesondere gilt:

$$x_0 + ix_1 = 0 = x_2 + ix_3.$$

Da eine komplexe Zahl genau dann Null ist, wenn ihr Real- und ihr Imaginärteil verschwinden, folgt die Aussage. □

2.3 Bemerkung. Wir merken uns an dieser Stelle, dass wir im Beweis in eq. (2.1) insbesondere gezeigt haben, dass

$$\forall q \in \mathbb{H} : q = q_0\,\mathrm{E} + q_1\,\mathrm{I} + q_2\,\mathrm{J} + q_3\,\mathrm{K} = \begin{pmatrix} q_0 + iq_1 & q_2 + iq_3 \\ -q_2 + iq_3 & q_0 - iq_1 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

2.4 Lemma. Die Einschränkung der Matrixmultiplikation von $\mathbb{C}^{2\times 2}$ auf $\mathbb{H}$ liefert eine Multiplikation

$$\cdot : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}.$$

Es gilt

$\cdot$	E	I	J	K
E	E	I	J	K
I	I	-1	K	$-$ J
J	J	$-$ K	-1	I
K	K	J	$-$ I	-1

Abbildung 2.1: Multiplikationstabelle für Quaternionen

und man erhält die folgende explizite Formel für die Multiplikation von Quaternionen $x, y \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (x_0\,\mathrm{E} + x_1\,\mathrm{I} + x_2\,\mathrm{J} + x_3\,\mathrm{K}) \cdot (y_0\,\mathrm{E} + y_1\,\mathrm{I} + y_2\,\mathrm{J} + y_3\,\mathrm{K}) \\ &= (x_0 \cdot y_0 - x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2 - x_3 \cdot y_3) \cdot \mathrm{E} \\ &+ (x_0 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_0 + x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2) \cdot \mathrm{I} \\ &+ (x_0 \cdot y_2 - x_1 \cdot y_3 + x_2 \cdot y_0 + x_3 \cdot y_1) \cdot \mathrm{J} \\ &+ (x_0 \cdot y_3 + x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 + x_3 \cdot y_0) \cdot \mathrm{K}\,. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Das erklärt auch, warum man sich meist auf die Tabelle beschränkt.

Aufgabe 2.5. Beweise, dass die Multiplikationstabelle 2.1 gilt.

2.6 Satz. Die Quaternionen $(\mathbb{H}, +, \mathbf{0}, \cdot, \mathrm{E})$ sind kein Körper! Das liegt daran, dass die soeben definierte Multiplikation nicht kommutativ ist, d.h. für zwei Quaternionen $x, y \in \mathbb{H}$ gilt im Allgemeinen

$$xy \neq yx.$$

Ansonsten gelten aber alle Rechenregeln, die auch für reelle oder komplexe Zahlen gelten. Man sagt daher auch, die Quaternionen sind ein *Schiefkörper*.

2.7 Bemerkung. Dass wirklich alle Rechenregln der reellen Zahlen Axiom 1.5 auch für die Quaternionen gelten, beweist man beispielsweise durch Einsetzen und Nachrechnen. Für die Existenz multiplikativer Inversen gibt es aber eine viel einfacherere Möglichkeit, die wir später noch erklären, siehe eq. (2.16).

2.8 Bemerkung (Quaternionische Relationen)**.** Weil die Quaternionen ein Schiefkörper sind, kann man sich das auswendig lernen der schrecklichen Multiplikationsregeln sparen. Man merkt sich die Körperaxiome (die man von den reelen Zahlen ja schon kennt), berücksichtigt die Nicht-Kommutativität, und lernt ansonsten nur die Gleichungen

$$\mathrm{I}^2 = \mathrm{J}^2 = \mathrm{K}^2 = \mathrm{I}\,\mathrm{J}\,\mathrm{K} = -1. \tag{2.4}$$

Alle anderen Rechenregeln folgen nämlich daraus. Eine Rechnung sieht dann z.B. so aus:

$$(1 + 2\,\mathrm{I})(3 + 4\,\mathrm{J}) = 3 + 4\,\mathrm{J} + 6\,\mathrm{I} + 8\,\mathrm{I}\,\mathrm{J} = 3 + 4\,\mathrm{J} + 6\,\mathrm{I} + 8\,\mathrm{K}$$

2.9 Bemerkung. Die Gleichungen eq. (2.4) nennt man auch die *quaternionischen Relationen*. Diese stammen vom Erfinder der Quaternionen: Sir William Rowan Hamilton, siehe fig. 2.2. Der Legende nach sind ihm diese Gleichungen am 16. Oktober 1843 während eines langen Spaziergangs mit seiner Frau am Royal Canal in Dublin eingefallen. Er war davon so begeistert, dass er sie in einen Pfeiler der Broom Bridge geritzt hat, siehe Bemerkung 2.9. Die beiden waren danach aber trotzdem noch zusammen.

Abbildung 2.2: "Here as he walked by on the 16th of October 1843 Sir William Rowan Hamilton in a flash of genius discovered the fundamental formula for quaternion multiplication $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ & cut it on a stone of this bridge."

Abbildung 2.3: Sir Willian Rowan Hamilton (⋆04.08.1805 in Dublin; †02.09.1865 in Dublin), Mathematiker, Physiker, Superheld. Erfinder der Quaternionen, Begründer der Hamiltonschen Mechanik, zum Ritter geschlagen vom Lord Lieutenant von Irland.

2.2 Definition im $\mathbb{R}^4$

Nach Lemma 2.2 besitzt also jedes Quaternion genau eine Darstellung der Form

$$q_0\,\mathrm{E} + q_1\,\mathrm{I} + q_2\,\mathrm{J} + q_3\,\mathrm{K}\,.$$

Es ist also eindeutig durch die vier reellen Zahlen $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$ bestimmt. Ein Tupel aus vier rellen Zahlen $(q_0, q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^4$ speichert also genau die gleiche Information. Daher kann man

Quaternionen auch als Vektoren im $\mathbb{R}^4$ ansehen und das wird auch oft so gemacht. Wir hätten alternativ also auch so vorgehen können:

2.10 Definition (Quaternionen)**.** Definiere $(\mathbb{H}, +) = (\mathbb{R}^4, +)$ und definiere die folgende Multiplikation:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_0 \cdot y_0 - x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2 - x_3 \cdot y_3 \\ x_0 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_0 + x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 \\ x_0 \cdot y_2 - x_1 \cdot y_3 + x_2 \cdot y_0 + x_3 \cdot y_1 \\ x_0 \cdot y_3 + x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 + x_3 \cdot y_0 \end{pmatrix}$$

Definiere außerdem

$$\mathrm{E} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{I} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{J} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{K} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.11 Bemerkung. Man kann dann die Multiplikation auch wieder so schreiben

$$\begin{aligned} x \cdot y = {} & (x_0 \cdot y_0 - x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2 - x_3 \cdot y_3) \cdot \mathrm{E} \\ & + (x_0 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_0 + x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2) \cdot \mathrm{I} \\ & + (x_0 \cdot y_2 - x_1 \cdot y_3 + x_2 \cdot y_0 + x_3 \cdot y_1) \cdot \mathrm{J} \\ & + (x_0 \cdot y_3 + x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 + x_3 \cdot y_0) \cdot \mathrm{K}, \end{aligned}$$

Wir haben also die Multiplikation auf dem $\mathbb{R}^4$ mit Gewalt so definiert, dass sie der Multiplikation von Quarternionen $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}^{2\times 2}$ entspricht, vergleiche eq. (2.3). Man darf sich also aussuchen, ob man ein Quaternion als eine Matrix im $\mathbb{C}^{2\times 2}$ (einer speziellen Form) oder einen Vektor im $\mathbb{R}^4$ ansieht.

2.3 Real- und Imaginärteil

Wir haben gesehen, dass man die vier Komponenten q_0, q_1, q_2, q_3 eines Quaternions $q = q_0 + q_1\,\mathrm{I} + q_2\,\mathrm{J} + q_3\,\mathrm{K} \in \mathbb{H} \subset \mathbb{C}^{2\times 2}$ eben auch als ein 4-Tupel $(q_0, q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^4$ ansehen kann. Es gibt nun noch mehr Möglichkeiten, vier Zahlen zu gruppieren. Diese ergeben weitere bekannte Darstellungen. Ein 4-Tupel ist ja nichts anderes als ein 2-Tupel bestehend aus einem 1-Tupel und einem 3-Tupel. Man interpretiert also

$$q = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = q_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} =: q_0 + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \triangleq (q_0, (q_1, q_2, q_3)). \tag{2.5}$$

Häufig sieht diese Schreibweise dann auch so aus

$$q = a + \vec{v}, \qquad a = q_0 \in \mathbb{R}, \qquad \vec{v} := \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}.$$

Das sieht komisch aus, weil man meinen könnte hier würde ein Skalar und ein Vektor "addiert". Diese Addition kann man aber nicht wirklich ausführen, es ist nur eine Schreibweise, die durch

eq. (2.5) definiert wird. Man nennt dies Schreibweise auch die *Real- und Imaginärteildarstellung* und entsprechend von einem Quaternion $q = a + \vec{v}$ dann auch a den *Realteil* und $\vec{v}$ den *Imaginärteil*. In Analogie zu den komplexen Zahlen erhalten wir also auch hier Funktionen

$$\mathrm{Re} : \mathbb{H} \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{Im} : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^3,$$

für die dann (mit obiger Notationskonvention) gilt

$$q = \mathrm{Re}(q) + \mathrm{Im}(q).$$

Der Imaginärteil ist hier nur eben komplizierter. Addition und Multiplikation übertragen sich dann entsprechend in die Real- und Imaginärteil-Schreibweise.

2.12 Definition (rein imaginär)**.** Man nennt

$$\mathbb{H}_r := \{q_1\,\mathrm{I} + q_2\,\mathrm{J} + q_3\,\mathrm{K} \mid q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{H}$$

die Menge aller *rein imaginären Quarternionen* und schreibt dafür manchmal auch einfach $\mathbb{R}^3$, siehe obige Bemerkung. Umgekehrt nennt man

$$\{q_0\,\mathrm{E} + 0 \cdot \mathrm{I} + 0 \cdot \mathrm{J} + 0 \cdot \mathrm{K} \mid q_0 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{H}$$

die Menge aller *rellen Quarternionen* und schreiben dafür auch einfach $\mathbb{R}$.

2.13 Lemma. Es gilt für rein imaginäre Quarternionen

$$\forall p, q \in \mathbb{H}_r \triangleq \mathbb{R}^3 : pq = -\langle p, q\rangle + p \times q \tag{2.6}$$

Beweis. Die Quaternionen $p, q \in \mathbb{H}$ haben also Darstellungen der Form

$$p = p_0 + p_1\,\mathrm{I} + p_2\,\mathrm{J} + p_3\,\mathrm{K}, \qquad q = q_0 + q_1\,\mathrm{I} + q_2\,\mathrm{J} + q_3\,\mathrm{K}$$

mit $p_0 = 0 = q_0$. Verwendet man die schreckliche explizite Formel eq. (2.3) für die allgemeine Multiplikation von Quaternionen, so "vereinfacht" sich diese zu

$$\begin{aligned}
pq &= (p_1\,\mathrm{I} + p_2\,\mathrm{J} + p_3\,\mathrm{K})(q_1\,\mathrm{I} + q_2\,\mathrm{J} + q_3\,\mathrm{K}) \\
&= (p_0 \cdot q_0 - p_1 \cdot q_1 - p_2 \cdot q_2 - p_3 \cdot q_3) \cdot \mathrm{E} \\
&\quad + (p_0 \cdot q_1 + p_1 \cdot q_0 + p_2 \cdot q_3 - p_3 \cdot q_2) \cdot \mathrm{I} \\
&\quad + (p_0 \cdot q_2 - p_1 \cdot q_3 + p_2 \cdot q_0 + p_3 \cdot q_1) \cdot \mathrm{J} \\
&\quad + (p_0 \cdot q_3 + p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1 + p_3 \cdot q_0) \cdot \mathrm{K} \\
&= (-p_1 \cdot q_1 - p_2 \cdot q_2 - p_3 \cdot q_3) \cdot \mathrm{E} \\
&\quad + (p_2 \cdot q_3 - p_3 \cdot q_2) \cdot \mathrm{I} \\
&\quad + (-p_1 \cdot q_3 + p_3 \cdot q_1) \cdot \mathrm{J} \\
&\quad + (p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1) \cdot \mathrm{K} \\
&\triangleq -\langle p, q\rangle + \begin{pmatrix} p_2 \cdot q_3 - p_3 \cdot q_2 \\ -p_1 \cdot q_3 + p_3 \cdot q_1 \\ p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1 \end{pmatrix} \\
&= -\langle p, q\rangle + p \times q.
\end{aligned}$$

□

2.14 Bemerkung. Die Darstellung

$$q = q_1\,\mathrm{E} + q_2\,\mathrm{I} + q_3\,\mathrm{J} + q_4\,\mathrm{K} = (q_1 + q_2\,\mathrm{I}) + (q_3 + q_4\,\mathrm{I})\,\mathrm{J}$$

motiviert dazu, ein Quaternion q als ein 2-Tupel aus 2-Tupeln bzw. aus komplexen Zahlen aufzufassen. Es ist nämlich q auch durch die komplexen Zahln $q_1 + q_2\,\mathrm{I}$ und $q_3 + q_4\,\mathrm{I}$ bestimmt. Damit könnte man q auch als ein 2-Tupel im $\mathbb{C}^2$ auffassen. Daher nennt man die Quaternionen auch *hyperkomplexe Zahlen.* Dieses Verfahren kann man sogar noch weiter Verallgemeinern. Das sind alles hochtrabende Fachbegriffe für die simple Tatsache, dass man vier Zahlen unterschiedlich auffassen kann: Entweder sind es vier Zahlen untereinander, vier Zahlen nebeneinander, eine Zahl und drei Zahlen, oder eben zwei mal zwei Zahlen.

Aufgabe 2.15. Ein Bauer kauft 5 Äpfel. Berechne das Volumen der Sonne.

2.4 Zentrum, Konjugation, Norm

2.16 Definition (Konjugation)**.** Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} {}^*: \mathbb{H} & \to & \mathbb{H} \\ q = q_0\,\mathrm{E} + q_1\,\mathrm{I} + q_2\,\mathrm{J} + q_3\,\mathrm{K} & \mapsto & q_0\,\mathrm{E} - q_1\,\mathrm{I} - q_2\,\mathrm{J} - q_3\,\mathrm{K} \end{array}$$

heißt *(quaternionische) Konjugation.*

2.17 Lemma (Eigenschaften der Konjugation)**.** Die Konjugation hat folgende Eigenschaften:

(i). * is ist *involutiv*, d.h.

$$\forall q \in \mathbb{H} : q^{**} = q \tag{2.7}$$

(ii). * ist *additiv*, d.h.

$$\forall p, q \in \mathbb{H} : (p + q)^* = p^* + q^*. \tag{2.8}$$

(iii). Die reellen Quaternionen sind charakterisiert durch

$$\forall q \in \mathbb{H} : q \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow q^* = q. \tag{2.9}$$

(iv). Die rein imaginäre Quaternionen sind charakterisiert durch

$$\forall q \in \mathbb{H} : q \in \mathbb{H}_r \Longleftrightarrow q^* = -q. \tag{2.10}$$

(v). Es gilt

$$\forall q \in \mathbb{H} : q^* = (\mathrm{Re}(q) + \mathrm{Im}(q))^* = \mathrm{Re}(q) - \mathrm{Im}(q). \tag{2.11}$$

(vi). Die Konjugation ist ein so genannter *Anti-Automorphismus*, d.h. es gilt

$$\forall p, q \in \mathbb{H} : (pq)^* = q^* p^*. \tag{2.12}$$

(vii). Es gilt die Formel

$$\forall q \in \mathbb{H} : q^* = -\frac{1}{2}(q + \mathrm{I}\,q\,\mathrm{I} + \mathrm{J}\,q\,\mathrm{J} + \mathrm{K}\,q\,\mathrm{K}). \tag{2.13}$$

Beweis.

(i). Folgt aus der Definition.

(ii). Folgt aus der Definition.

(iii). Folgt aus der Definition.

(iv). Folgt aus der Definition.

(v). Folgt aus der Definition.

(vi). Wir rechnen

$$\begin{aligned}
(pq)^* =& ((\mathrm{Re}(p) + \mathrm{Im}(p))(\mathrm{Re}(q) + \mathrm{Im}(q)))^* \\
=& (\mathrm{Re}(p)\,\mathrm{Re}(q) + \mathrm{Re}(p)\,\mathrm{Im}(q) + \mathrm{Im}(p)\,\mathrm{Re}(q) + \mathrm{Im}(p)\,\mathrm{Im}(q))^* \\
\overset{(2.6)}{=}& (\mathrm{Re}(p)\,\mathrm{Re}(q) + \mathrm{Re}(p)\,\mathrm{Im}(q) + \mathrm{Im}(p)\,\mathrm{Re}(q) - \langle \mathrm{Im}(p), \mathrm{Im}(q)\rangle + \mathrm{Im}(p) \times \mathrm{Im}(q))^* \\
\overset{(2.11)}{=}& (\mathrm{Re}(p)\,\mathrm{Re}(q))^* + (\mathrm{Re}(p)\,\mathrm{Im}(q))^* + (\mathrm{Im}(p)\,\mathrm{Re}(q))^* - (\langle \mathrm{Im}(p), \mathrm{Im}(q)\rangle)^* + (\mathrm{Im}(p) \times \mathrm{Im}(q))^* \\
\overset{(2.9),(2.10)}{=}& \mathrm{Re}(p)\,\mathrm{Re}(q) - \mathrm{Re}(p)\,\mathrm{Im}(q) - \mathrm{Im}(p)\,\mathrm{Re}(q) - \langle \mathrm{Im}(p), \mathrm{Im}(q)\rangle - \mathrm{Im}(p) \times \mathrm{Im}(q) \\
=& \mathrm{Re}(q)\,\mathrm{Re}(p) - \mathrm{Im}(q)\,\mathrm{Re}(p) - \mathrm{Re}(q)\,\mathrm{Im}(p) - \langle \mathrm{Im}(q), \mathrm{Im}(p)\rangle + \mathrm{Im}(q) \times \mathrm{Im}(p) \\
=& (\mathrm{Re}(q) - \mathrm{Im}(q))(\mathrm{Re}(p) - \mathrm{Im}(p)) \\
\overset{(2.11)}{=}& (\mathrm{Re}(q) + \mathrm{Im}(q))^*(\mathrm{Re}(p) + \mathrm{Im}(p))^* \\
=& q^* p^*
\end{aligned}$$

(vii). Es gilt

$$\begin{aligned}
(q + \mathrm{I}\,q\,\mathrm{I} + \mathrm{J}\,q\,\mathrm{J} + \mathrm{K}\,q\,\mathrm{K}) =& q_0\,\mathrm{E} + q_1\,\mathrm{I} + q_2\,\mathrm{J} + q_3\,\mathrm{K} \\
&+ \mathrm{I}(q_0\,\mathrm{E} + q_1\,\mathrm{I} + q_2\,\mathrm{J} + q_3\,\mathrm{K})\,\mathrm{I} \\
&+ \mathrm{J}(q_0\,\mathrm{E} + q_1\,\mathrm{I} + q_2\,\mathrm{J} + q_3\,\mathrm{K})\,\mathrm{J} \\
&+ \mathrm{K}(q_0\,\mathrm{E} + q_1\,\mathrm{I} + q_2\,\mathrm{J} + q_3\,\mathrm{K})\,\mathrm{K} \\
=& q_0\,\mathrm{E} + q_1\,\mathrm{I} + q_2\,\mathrm{J} + q_3\,\mathrm{K} \\
&- q_0\,\mathrm{E} - q_1\,\mathrm{I} + q_2\,\mathrm{J} + q_3\,\mathrm{K} \\
&- q_0\,\mathrm{E} + q_1\,\mathrm{I} - q_2\,\mathrm{J} + q_3\,\mathrm{K} \\
&- q_0\,\mathrm{E} + q_1\,\mathrm{I} + q_2\,\mathrm{J} - q_3\,\mathrm{K} \\
=& -2(q_0\,\mathrm{E} - q_1\,\mathrm{I} - q_2\,\mathrm{J} - q_3\,\mathrm{K}) = -2q^*
\end{aligned}$$

□

2.18 Definition (Zentrum / Anti-Zentrum)**.** Die Menge

$$Z(\mathbb{H}) := \{q \in \mathbb{H} \mid \forall p \in \mathbb{H} : pq = qp\}$$

heißt *Zentrum von* $\mathbb{H}$. Es besteht aus der Menge aller Quarternionen, die mit allen anderen *kommutieren*. Die Menge

$$A(\mathbb{H}) := \{q \in \mathbb{H} \mid \forall p \in \mathbb{H} : pq = -qp\}$$

heißt *Anti-Zentrum von* $\mathbb{H}$. Es besteht aus der Menge aller Quarternionen, die mit allen anderen *anti-kommutieren*.

2.19 Satz (Anti/Kommutativität)**.** Es gilt

$$Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}, \qquad A(\mathbb{H}) = 0.$$

Beweis.
"$\mathbb{R} \subset Z(\mathbb{H})$": Das ist klar.
"$Z(\mathbb{H}) \subset \mathbb{R}$" . Sei umgekehrt $q \in Z(H)$. Dann folgt (da q also mit allen Quaternionen kommutiert)

$$\begin{aligned} q^* &\overset{(2.13)}{=} -\frac{1}{2}(q + \mathrm{I}\,q\,\mathrm{I} + \mathrm{J}\,q\,\mathrm{J} + \mathrm{K}\,q\,\mathrm{K}) \\ &= -\frac{1}{2}(q + q\,\mathrm{I}^2 + q\,\mathrm{J}^2 + q\,\mathrm{K}^2) = -\frac{1}{2}(q - q - q - q) = q \end{aligned}$$

Daraus folgt $q \in \mathbb{R}$ via (2.9).
"$A(\mathbb{H}) = 0$": Angenommen es gäbe ein $p \in A(\mathbb{H}) \setminus \{0\}$. Dann gilt nach Definition

$$\forall q \in \mathbb{H} : pq = -qp.$$

Für $q = p$ gilt also insbesondere $p^2 = -p^2$. Das impliziert $p = -p$ und dies wiederum $p = 0$. Widerspruch! □

2.20 Bemerkung. Für zwei allgemeine Quaternionen $p, q \in \mathbb{H}$ gilt also im Allgemeinen weder $pq = qp$ noch $pq = -qp$. Letzteres wird auf diversen Internetseiten immer mal wieder behauptet, stimmt aber nicht. Es ist aber korrekt, dass die imaginären Einheiten I, J, K *untereinander* anti-kommutieren. Das haben wir aber schon in fig. 2.1 gesehen.

2.21 Definition (Norm)**.** Die Abbildung

$$\begin{aligned} \|_\| : \mathbb{H} &\to \mathbb{R} \\ q = q_0\,\mathrm{E} + q_1\,\mathrm{I} + q_2\,\mathrm{J} + q_3\,\mathrm{K} &\mapsto \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \end{aligned}$$

heißt *(quaternionische) Norm.*

2.22 Lemma (Eigenschaften der Norm)**.**

(i). Fasst man $q \in \mathbb{H}$ als Element $q \in \mathbb{R}^4$ auf, so gilt

$$|q| = \|q\|.$$

Damit hat die quaternionische Norm $\|_\|$ also genau die gleichen Eigenschaften wie die euklidische Norm $|_|$ im $\mathbb{R}^4$.

(ii). Fasst man $q \in \mathbb{H} \subset \mathbb{C}^{2\times 2}$ als Matrix auf, so gilt

$$\|q\|^2 = \det(q). \tag{2.14}$$

(iii). Norm und Konjugation stehen in der Beziehung (vergl. eq. (1.10) für komplexe Zahlen)

$$\|q\|^2 = qq^* = q^*q. \tag{2.15}$$

(iv). Ist insbesondere $q \neq 0$, so gilt die Inversionsformel,

$$q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|}. \tag{2.16}$$

Ist insbesondere $\|q\| = 1$, so gilt

$$q^{-1} = q^*. \tag{2.17}$$

(v). Die Norm ist multiplikativ (vergl. eq. (1.9) für komplexe Zahlen)

$$\forall q, q' \in \mathbb{H} : \|qq'\| = \|q\|\|q'\|. \tag{2.18}$$

Beweis.

(i). Das gilt nach Definition 2.21 der quaternionischen Norm $\|_\|$ und der Definition eq. (1.1) der euklidischen Norm $|_|$.

(ii). Es folgt direkt aus der Definition für jedes Quaternion $q = q_0 + q_1\,\mathrm{I} + q_2\,\mathrm{J} + q_3\,\mathrm{K}$

$$\begin{aligned}\det(q) &\overset{(2.2)}{=} \det\begin{pmatrix} q_0 + iq_1 & q_2 + iq_3 \\ -q_2 + iq_3 & q_0 - iq_1 \end{pmatrix} \overset{(1.11)}{=} (q_0 + iq_1)(q_0 - iq_1) - (-q_2 + iq_3)(q_2 + iq_3) \\ &= q_0^2 - i^2 q_1^2 + q_2^2 - i^2 q_3^2 = \|q\|^2.\end{aligned}$$

(iii).

$$\begin{aligned} qq^* &= (q_0 + q_1\,\mathrm{I} + q_2\,\mathrm{J} + q_3\,\mathrm{K})(q_0 - (q_1\,\mathrm{I} + q_2\,\mathrm{J} + q_3\,\mathrm{K})) = q_0^2 - (q_1\,\mathrm{I} + q_2\,\mathrm{J} + q_3\,\mathrm{K})^2 \\ &\overset{(2.6)}{=} q_0^2 + \left\langle \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \right\rangle - \underbrace{\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}}_{=0} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = \|q\|^2. \end{aligned}$$

Wendet man das bisher bewiesene auf q^* statt q an, so erhält man, dass auch

$$q^{**}q^* = \|q^*\| \Longrightarrow qq^* = \|q\|.$$

(iv). Das folgt direkt aus (2.15).

(v). Wir rechnen

$$\|qq'\|^2 \overset{(2.14)}{=} \det(qq') \overset{1.34}{=} \det(q)\det(q') = \|q\|^2\|q'\|^2.$$

□

2.23 Definition (Versor)**.** Ein Quaternion $q \in \mathbb{H}$ mit der Eigenschaft $\|q\| = 1$ heißt *Versor* oder auch *Einheitsquaternion*. Die Menge aller Versoren schreiben wir als

$$\mathbb{V} := \{q \in \mathbb{H} \mid \|q\| = 1\}.$$

2.24 Bemerkung. Fasst man q als ein Element im $\mathbb{R}^4$ auf, so entspricht die Menge der Versoren grade der $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$, d.h. es gilt

$$\mathbb{V} = \mathbb{S}^3.$$

Die Versoren sind also nichts anderes als die dreidimensionale Einheitssphäre im vierdimensionalen euklidischen Raum.

2.25 Satz (Versorengruppe)**.** Die Versoren $\mathbb{V}$ bilden zusammen mit der Quaternionenmultiplikation $\cdot$ eine Gruppe.

Beweis. Wir müssen nicht alle Axiome aus der Definition einer Gruppe, siehe Definition 1.1 nachrechnen, weil $(\mathbb{H} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ ja schon eine Gruppe ist. Es genügt zu zeigen, dass für zwei Quaternionen $q, q' \in \mathbb{V}$ auch das Produkt $q \cdot q' \in \mathbb{V}$. Das folgt aber aus:

$$\|q \cdot q'\| \overset{(2.18)}{=} \|q\| \cdot \|q'\| = 1 \cdot 1 = 1.$$

□

3 Rotationen

3.1 Drehungen im Raum

3.1 Definition (Rodrigues-Rotation)**.** Sei $u \in \mathbb{S}^2$ und $\alpha \in [0, \pi]$. Dann heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} R_{u,\alpha} : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ x &\mapsto \cos(\alpha)x_\perp + \sin(\alpha)(u \times x) + x_\parallel \end{aligned}$$

Rodrigues-Rotation um die Achse u mit Drehwinkel α. Dabei sind $x_\perp$ ("x senkrecht") und $x_\parallel$ ("x parallel") definiert durch

$$x_\perp := x - \langle x, u\rangle u, \qquad x_\parallel := \langle x, u\rangle u.$$

Die Menge aller Rodrigues-Rotationen bezeichnen wir mit

$$\mathrm{Rod} := \{R_{u,\alpha} \mid u \in \mathbb{S}^2, \alpha \in [0, \pi]\}.$$

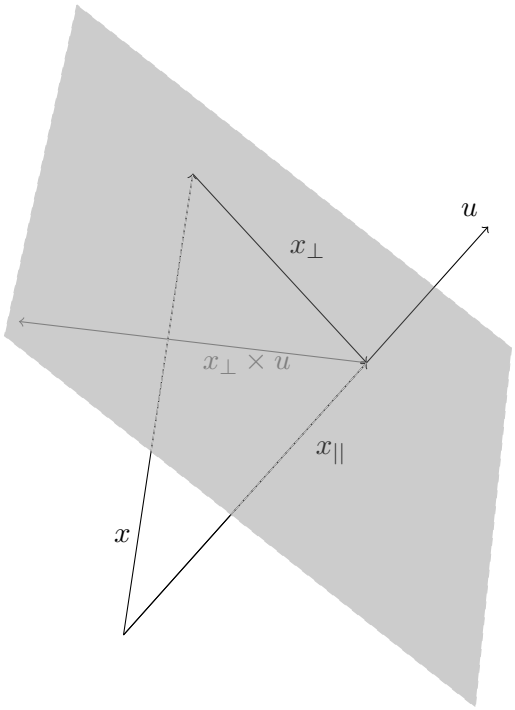

Abbildung 3.4: Rodrigues-Rotation

3.2 Bemerkung. Es ist vielleicht nicht ganz offensichtlich, warum das formale Objekt $R_{u,\alpha}$ auch in der Anschauung tatsächlich einer Drehung um die Achse u mit Drehwinkel α entspricht. Dafür klären wir erstmal, was es mit $x_\perp$ und $x_\parallel$ auf sich hat: Der Gleichung

$$\langle x_\perp, u\rangle = \langle x - \langle x, u\rangle, u\rangle = \langle x, u\rangle - \langle x, u\rangle$$

entnehmen wir, dass $x_\perp$ senkrecht auf u steht. Da $\langle x, u\rangle \in \mathbb{R}$, ist $x_\parallel = \langle x, u\rangle u$ ein Vielfaches von u, also parallel zu u. Schließlich ist

$$x_\perp + x_\parallel = x - \langle x, u\rangle u + \langle x, u\rangle u = x,$$

d.h. wir haben x zerlegt in einen Anteil, der senkrecht zu u ist, und einen Anteil, der parallel zu u ist.

Abbildung 3.5: Olindes Rodrigues (⋆06.10.1795 in Bordeaux; †17.12.1851 in Paris), Mathematiker, Banker, Sozialreformer.

3.3 Satz (Linearität von Rodrigues-Rotationen)**.** Jede Rodrigues-Rotation $R_{u,\alpha} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist eine lineare Abbildung, d.h. es gilt für beliebige $x, y \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

$$R_{u,\alpha}(x + \lambda y) = R_{u,\alpha}(x) + \lambda R_{u,\alpha}(y).$$

Beweis. Aus

$$\begin{aligned}(x + \lambda y)_\perp &= x + \lambda y - \langle x + \lambda y, u\rangle u = x + \lambda y - \langle x, u\rangle - \lambda\langle y, u\rangle u \\ &= (x - \langle x, u\rangle) + \lambda(y - \langle y, u\rangle u) = x_\perp + \lambda y_\perp\end{aligned}$$

und

$$(x + \lambda y)_\parallel = \langle x + \lambda y, u\rangle u = \langle x, u\rangle u + \lambda\langle y, u\rangle u = x_\parallel + \lambda y_\parallel$$

folgt

$$\begin{aligned} R_{u,\alpha}(x+\lambda y) &= \cos(\alpha)(x+\lambda y)_\perp + \sin(\alpha)(u\times(x+\lambda y)) + (x+\lambda y)_\parallel \\ &= \cos(\alpha)(x_\perp + \lambda y_\perp) + \sin(\alpha)(u\times x + u\times\lambda y)) + x_\parallel + \lambda y_\parallel \\ &= \cos(\alpha)x_\perp + \lambda\cos(\alpha)y_\perp + \sin(\alpha)u\times x + \sin(\alpha)u\times\lambda y) + x_\parallel + \lambda y_\parallel \\ &= R_{u,\alpha}(x) + \lambda R_{u,\alpha}(y). \end{aligned}$$

□

3.4 Satz (Rodrigues-Gruppe)**.** Die Rodrigues-Rotationen Rod bilden zusammen mit der Verknüpfung von Abbildungen $\circ$ eine Gruppe.

Beweis. Dieser Beweis ist noch zu führen (Tipp (?): $u \times v \measuredangle(u,v)$)

Seien $R_{u,\alpha}, R_{v,\beta} \in$ Rod. Dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}^3$ □

3.5 Definition (Drehmatrix)**.** Die Menge

$$\mathrm{SO}(3) := \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid AA^t = E, \det(A) = 1\}$$

heißt *spezielle orthogonale Gruppe* oder auch *Gruppe der Drehmatrizen.*

3.6 Bemerkung. Diese Definition werdet ihr auch in diversen Büchern finden. Dass wir Drehungen nicht so definiert haben liegt daran, dass wir einer Matrix in SO(3) zunächst einmal nicht ansehen können, warum es sich dabei um eine Drehung handelt. Aber Euler kann das! Die nächste Definition und der nächste Satz sind nämlich richtige Mathematik.

3.7 Satz (Rotationssatz von Euler)**.** Sei $A \in \mathrm{SO}(3)$. Dann existiert genau ein $u \in \mathbb{S}^2$ und $\alpha \in [0,\pi]$, sodass $A = R_{u,\alpha}$. Die Drehachse u ist eine Lösung des linearen Gleichungssystems $Au = u$ und der Drehwinkel kann berechnet werden durch[2]

$$\alpha = \arccos\left(\tfrac{a_{1,1}+a_{2,2}+a_{3,3}-1}{2}\right)$$

Umgekehrt ist jedes Rodrigues-Rotation $R_{u,\alpha}$ eine Drehmatrix, d.h. $R_{u,\alpha} \in \mathrm{SO}(3)$.

3.8 Bemerkung. Dieser Satz ist aber mit rein elementaren Mitteln nicht ganz einfach zu beweisen. Ein eleganter Beweis benötigt etwas fortgeschrittenere Methoden aus der Linearen Algebra (Spektralsatz für normale Endomorphismen in unitären Räumen), die den meisten Lesern vermutlich noch nicht zur Verfügung stehen. Wir geben hier daher keinen Beweis an. In den folgenden Kapiteln wird eine Drehung für uns immer durch Formel Definition 3.1 gegeben sein.

3.2 Quaternionen und räumliche Drehungen

3.9 Satz (Quaternionen und Rotationen)**.** Die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{V} &\to \mathrm{Rod} \\ q &\mapsto C_q, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} C_q : \mathbb{H}_r &\to \mathbb{H}_r \\ p &\mapsto qpq^{-1}, \end{aligned}$$

ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern $\{\pm 1\}$.

[2] Man nennt $a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} =: \mathrm{tr}(A)$ auch die *trace* oder - auf Deutsch - die *Spur* von A.

3.10 Bemerkung. Was soll das jetzt eigentlich heißen? Zunächst einmal sei hier bemerkt, dass wir den $\mathbb{R}^3$ mit den rein imaginären Quaternionen $\mathbb{H}_r$ identifizieren. In diesem Sinne ist dann C_q auch eine Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und hat damit eine Chance identisch mit einer geeigneten Rodrigues-Rotation $R_{u,\alpha}$ zu sein.
C_q steht für "conjugation with q" also der *Konjugation mit q* (sinnloser sprachlicher Hinweis für Algebraiker). Den Begriff *Gruppenhomomorphismus* haben wir schon in Definition 1.2 erklärt und den Begriff *Kern* in Definition 1.4. Dass f *surjektiv* ist bededeutet, dass jede Rodrigues-Rotation $R_{u,\alpha}$ durch eine Konjugation C_q dargestellt werden kann, d.h.

$$\forall R_{u,\alpha} \in \mathrm{Rod} : \exists q \in \mathbb{V} \, : f(q) = C_q = R_{u,\alpha}.$$

Aus beidem zusammen folgt jetzt übrigens, dass es für jede Rodrigues-Rotation $R_{u,\alpha} \in \mathrm{Rod}$ genau zwei Elemente $\pm q \in \mathbb{V}$ gibt, sodass $f(\pm q) = R_{u,\alpha}$.

Beweis. Als erstes bemerken wir, dass für $q \in \mathbb{V}$ gemäß (2.17) die Abbildung C_q auch geschrieben werden kann als

$$\forall p \in \mathbb{H}_r : C_q(p) = qpq^{-1} = qpq^*.$$

Schritt 1 ($C_q : \mathbb{H}_r \to \mathbb{H}_r$): Zunächst einmal müssen wir zeigen, dass für jedes $q \in \mathbb{V}$ und $p \in \mathbb{H}_r$ auch wirklich $C_q(p) \in \mathbb{H}_r$ gilt. Dazu rechnen wir erst einmal

$$C_q(p)^* = (qpq^*)^* \overset{(2.12)}{=} (q^{**})p^*q^* \overset{(2.7)}{=} qp^*q^* \overset{(2.10)}{=} -qpq^* = -C_q(p).$$

Daraus folgt jetzt aber wiederum mit (2.10), dass $qpq^* \in \mathbb{H}_r$.
Schritt 2 (Rodrigues-Form von Versoren): Wir zeigen, dass es für jedes $q \in \mathbb{V}$ einen Vektor $u \in \mathbb{S}^2$ und einen Winkel $\alpha \in [0, \pi]$ gibt, sodass

$$\pm q = \cos(\tfrac{\alpha}{2}) + \sin(\tfrac{\alpha}{2})u. \tag{3.1}$$

Wir sagen dann, dass q in *Rodrigues-Form* dargestellt ist. Da $q \in \mathbb{V}$, gilt

$$1 = \|q\|^2 = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = \mathrm{Re}(q)^2 + \|\mathrm{Im}(q)\|^2$$

Sei nun zunächst $\mathrm{Re}(q) \geq 0$. Dann gibt es einen Winkel $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, sodass

$$\cos(\beta) = \mathrm{Re}(q), \qquad \sin(\beta) = \|\mathrm{Im}(q)\|.$$

Falls $\mathrm{Im}(q) \neq 0$, so definiert man jetzt noch

$$u' := \frac{\mathrm{Im}(q)}{\|\mathrm{Im}(q)\|} \in \mathbb{S}^2,$$

und erhält

$$q = \mathrm{Re}(q) + \mathrm{Im}(q) = \cos(\beta) + \|\mathrm{Im}(q)\| \frac{\mathrm{Im}(q)}{\|\mathrm{Im}(q)\|} = \cos(\beta) \pm \sin(\beta)u'.$$

Falls doch $\mathrm{Im}(q) = 0$, so folgt $q = \mathrm{Re}(q) \geq 0$ und damit $q = 1$ (da $\|q\| = 1$). Setze $\beta := 0$ und wähle irgendein $u \in \mathbb{S}^2$. Dann ist

$$\cos(\beta) + \sin(\beta)u = 1 + 0 \cdot u = 1 = q.$$

Falls $\mathrm{Re}(q) \leq 0$, so ist $\mathrm{Re}(-q) \geq 0$ und wir können das bisher Bewiesene anwenden.

Schritt 3 ($f : \mathbb{V} \to \mathrm{Rod}$, Surjektivität): Sei $u \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ und $\alpha \in [0, \pi]$. Das Quaternion

$$q := \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + u \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

erfüllt dann

$$\|q\|^2 = \cos(\tfrac{\alpha}{2})^2 + \|\sin(\tfrac{\alpha}{2})u\|^2 = \cos(\tfrac{\alpha}{2})^2 + \sin(\tfrac{\alpha}{2})^2 = 1,$$

d.h. $q \in \mathbb{V}$. Wir behaupten, dass $f(q) = R_{u,\alpha}$. Wenn wir dies gezeigt haben, dann folgt sowohl, dass f surjektiv ist, als auch, dass $f(\mathbb{V}) \subset \mathrm{Rod}$. Denn gemäß (3.1) ist für jedes $q \in \mathbb{V}$ entweder q oder $-q$ in der Form $\cos(\frac{\alpha}{2}) + \sin(\frac{\alpha}{2})u$ darstellbar und es gilt $f(-q) = C_{-q} = C_q$. Um nun $f(q) = R_{u,\alpha}$ zu zeigen, fassen wir $u \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 \triangleq \mathbb{H}_r$ als rein imaginäres Quaternion auf und erhalten zunächst für alle $x \in \mathbb{H}_r$ die Gleichungen

$$ux - xu \overset{(2.6)}{=} -\langle u, x\rangle + u \times x - (-\langle x, u\rangle + x \times u) = u \times x - x \times u \overset{(1.5)}{=} 2\, u \times x \tag{3.2}$$

und

$$\begin{aligned} uxu &\overset{(2.6)}{=} u(-\langle x, u\rangle + x \times u) = -\langle x, u\rangle u + u \cdot x \times u \\ &\overset{(2.6)}{=} -\langle x, u\rangle u - \langle u, x \times u\rangle + u \times (x \times u) \\ &\overset{(1.6)}{=} -\langle x, u\rangle u + u \times (x \times u) \\ &\overset{(1.5)}{=} -\langle x, u\rangle u - (x \times u) \times u \\ &\overset{(1.8)}{=} -\langle x, u\rangle u - \langle x, u\rangle u + \langle u, u\rangle x \\ &= x - 2\langle x, u\rangle u. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Diese Gleichungen können wir jetzt wie folgt verwenden:

$$\begin{aligned} C_q(x) = qxq^{-1} = qxq^* &= (\cos(\tfrac{\alpha}{2}) + u\sin(\tfrac{\alpha}{2}))x(\cos(\tfrac{\alpha}{2}) - u\sin(\tfrac{\alpha}{2})) \\ &= \cos(\tfrac{\alpha}{2})^2 x - \cos(\tfrac{\alpha}{2})\sin(\tfrac{\alpha}{2})xu + \sin(\tfrac{\alpha}{2})\cos(\tfrac{\alpha}{2})ux - \sin(\tfrac{\alpha}{2})^2 uxu \\ &= \cos(\tfrac{\alpha}{2})^2 x + \sin(\tfrac{\alpha}{2})\cos(\tfrac{\alpha}{2})(ux - xu) - \sin(\tfrac{\alpha}{2})^2 uxu \\ &\overset{(3.2)}{=} \cos(\tfrac{\alpha}{2})^2 x + 2\sin(\tfrac{\alpha}{2})\cos(\tfrac{\alpha}{2})(u \times x) - \sin(\tfrac{\alpha}{2})^2 uxu \\ &\overset{(3.3)}{=} \cos(\tfrac{\alpha}{2})^2 x + 2\sin(\tfrac{\alpha}{2})\cos(\tfrac{\alpha}{2})(u \times x) - \sin(\tfrac{\alpha}{2})^2 (x - 2\langle x, u\rangle u) \\ &= (\cos(\tfrac{\alpha}{2})^2 - \sin(\tfrac{\alpha}{2})^2)x + 2\sin(\tfrac{\alpha}{2})\cos(\tfrac{\alpha}{2})(u \times x) + 2\sin(\tfrac{\alpha}{2})^2\langle x, u\rangle u \\ &\overset{(1.4)}{=} \cos(\alpha)x + \sin(\alpha)\; u \times x + (1 - \cos(\alpha))\langle x, u\rangle u \\ &= \cos(\alpha)(x - \langle x, u\rangle u) + \sin(\alpha)\; u \times x + \langle x, u\rangle u = R_{u,\alpha}(x). \end{aligned}$$

Schritt 4 (Homomorphie): Für jedes $q_1, q_2 \in \mathbb{V}$ und $p \in \mathbb{H}_r$

$$\begin{aligned} f(q_1 q_2)(p) &= C_{q_1 q_2}(p) = q_1 q_2 p (q_1 q_2)^* = q_1 q_2 p q_2^* q_1^* = q_1 R_{q_2}(p) q_1^* \\ &= C_{q_1}(C_{q_2}(p)) = (f(q_1) \circ f(q_2))(p). \end{aligned}$$

Schritt 5 (Kern): Gilt $f(q) = 1$, so gilt also

$$\forall p \in \mathbb{H}_r : q = qpq^{-1} \iff pq = qp$$

Daher gilt für alle $a \in \mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{H}_r$ mit $p' := a + p$

$$p'q = (a+p)q = aq + pq = qa + qp = q(a+p) = qp'$$

und damit insgesamt $q \in \mathbb{Z}(\mathbb{H})$. Nach Satz 2.19 folgt daher $q \in \mathbb{R}$. Da nach Voraussetzung $1 = \|q\| = |q|$ muss $q = \pm 1$ gelten.

□

4 Kampfflugzeuge

4.1 Euler-Winkel

4.1 Definition. Es seien $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ die drei Koordinatenachsen. Dann heißen für jeden Winkel $\alpha \in [0, \pi]$ Rodrigues-Rotationen

$$\mathsf{R}_\alpha := R_{e_1,\alpha}, \qquad \mathsf{P}_\alpha := R_{e_2,\alpha}, \qquad \mathsf{Y}_\alpha := R_{e_3,\alpha}$$

roll, *pitch* und *yaw* (oder auch *Elementarrotationen*). Wir lassen hier auch Drehwinkel $\alpha \in [0, 2\pi]$ zu.

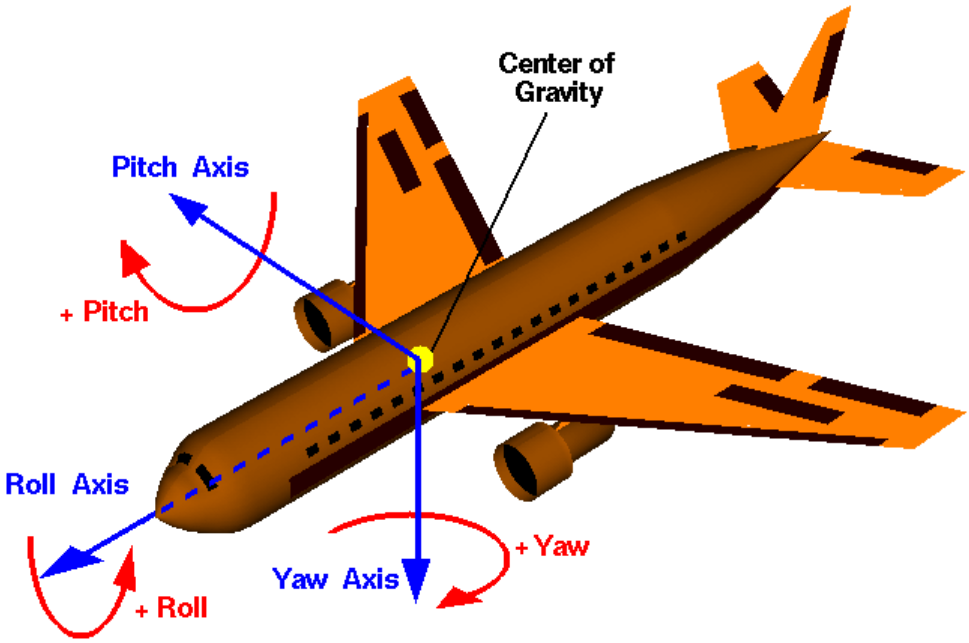

Abbildung 4.6: Roll, Pitch, Yaw

4.2 Satz (Euler-Winkel)**.** Die Drehungen $\mathsf{R}, \mathsf{P}, \mathsf{Y}$ können als Matrizen

$$M_{\mathsf{R},\alpha} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathsf{P},\alpha} := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathsf{Y},\alpha} := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden, d.h. für jedes $x \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\mathsf{R}_\alpha x = M_{\mathsf{R}_\alpha} x, \qquad \mathsf{P}_\alpha x = M_{\mathsf{P}_\alpha} x, \qquad \mathsf{Y}_\alpha x = M_{\mathsf{Y}_\alpha} x.$$

Beweis. Dieser Beweis ist noch zu führen

□

4.3 Satz (Euler)**.** Für jede Rodrigues-Rotation $R_{u,\varphi}$ existieren drei Winkel $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 2\pi]$, sodass

$$R_{u,\varphi} = (\mathsf{YPR})_{\alpha,\beta,\gamma} := \mathsf{Y}_\gamma \circ \mathsf{P}_\beta \circ \mathsf{R}_\alpha.$$

Beweis. Dieser Beweis ist noch zu führen

□

4.2 Gimbal Lock

4.4 Definition (Gimbal Lock)**.** Ein Winkel $\alpha \in [0, 2\pi]$ heißt *Roll Gimbal Lock*, falls es Winkel $\beta, \gamma \in [0, 2\pi]$ gibt, sodass für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\beta + \varepsilon, \gamma + \varepsilon \in [0, 2\pi]$ (solche ε heißen *zulässig*) gilt

$$(\mathsf{YPR})_{\alpha,\beta+\varepsilon,\gamma} = (\mathsf{YPR})_{\alpha,\beta,\gamma+\varepsilon}.$$

Analog definiert man auch einen *Pitch Gimbal Lock* und einen *Yaw Gimbal Lock*. Ein *Gimbal Lock* ist ein Roll, Pitch oder Yaw Gimbal lock.

4.5 Beispiel. Wir behaupten, dass $\beta := 3\pi/2$ ein pitch Gimbal lock ist. Dazu berechnen wir zunächst für beliebiges $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 2\pi]$ den Ausdruck $(\mathsf{YPR})_{\alpha,\beta,\gamma}$ zu

$$\begin{pmatrix} \cos(\beta)\cos(\alpha) & -\cos(\gamma)\sin(\alpha) + \sin(\gamma)\sin(\beta)\cos(\alpha) & \sin(\gamma)\sin(\alpha) + \cos(\gamma)\sin(\beta)\cos(\alpha) \\ \cos(\beta)\sin(\alpha) & \cos(\gamma)\cos(\alpha) + \sin(\gamma)\sin(\beta)\sin(\alpha) & -\sin(\gamma)\cos(\alpha) + \cos(\gamma)\sin(\beta)\sin(\alpha) \\ -\sin(\beta) & \sin(\gamma)\cos(\beta) & \cos(\gamma)\cos(\beta) \end{pmatrix}$$

Setzt man jetzt $\beta = 3\pi/2$, so erhält man

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\cos(\alpha)\sin(\gamma) - \sin(\alpha)\cos(\gamma) & \sin(\alpha)\sin(\gamma) - \cos(\alpha)\cos(\gamma) \\ 0 & \cos(\alpha)\cos(\gamma) - \sin(\alpha)\sin(\gamma) & -\cos(\alpha)\sin(\gamma) - \sin(\alpha)\cos(\gamma) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{1.12}{=} \begin{pmatrix} 0 & -\sin(\gamma+\alpha) & -\cos(\alpha+\gamma) \\ 0 & \cos(\alpha+\gamma) & -\sin(\alpha+\gamma) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wie man sieht, hängt das Ergebnis $(\mathsf{YPR})_{\alpha,3\pi/2,\gamma}$ nur von der Summe $\alpha+\gamma$ ab. Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ist $(\alpha+\varepsilon)+\gamma = \alpha+(\gamma+\varepsilon)$ und daher gilt für alle zulässigen ε also $(\mathsf{YPR})_{\alpha+\varepsilon,3\pi/2,\gamma}) = (\mathsf{YPR})_{\alpha,3\pi/2,\gamma+\varepsilon}$. Folglich ist $\beta = 3\pi/2$ ein pitch Gimbal lock.

5 Computerspiele

5.1 Zeitkomplexität

In Computerspielen müssen häufig viele Vektoren mehrfach gedreht werden. Angenommen wir haben n Vektoren im $\mathbb{R}^3$ und k Drehungen gegeben. Unser Ziel ist es alle Drehungen hintereinander auf alle Vektoren anzuwenden und das Ergebnis zu berechnen. Dazu haben wir jetzt verschiedene Möglichkeiten. Die Drehungen können entweder klassisch durch Matrizen oder durch Quaternionen beschrieben werden. Wir gehen davon aus, dass die Matrizen bzw. Quaternionen schon berechnet vorliegen. In fig. 5.7 haben wir ausgezählt, wie viele Multiplikationen und Additionen man benötigt, um jeweils eine Drehung auf einen Vektor anzuwenden, bzw. um zwei Drehungen miteinander zu verketten. Dabei haben wir Satz 5.1 verwendet.

	Matrizen	**Quaternionen**
Anwendung	$9 + 6 = 15$	$18 + 12 = 30$
Verkettung	$27 + 18 = 45$	$16 + 12 = 28$

Abbildung 5.7: Anzahl der Multiplikationen + Additionen

Nun gibt es grundsätzlich zwei Strategien: Wir können entweder alle Drehungen einzeln auf alle Vektoren anwenden oder erst alle Drehungen miteinander verketten und dann das Ergebnis auf alle Vektoren anwenden. Bei n Vektoren und k Drehungen berechnet sich der Aufwand wie in fig. 5.8 angegeben. Es gilt also:

	Matrizen	**Quaternionen**
Einzeln	$15nk$	$30nk$
Verkettung	$45(k-1) + 15n$	$28(k-1) + 30n$

Abbildung 5.8: Komplexität von Drehungen

5.1 Satz. Sei $q = \mathrm{Re}(q) + \mathrm{Im}(q) =: w + v \in \mathbb{H}$ und $p \in \mathbb{H}_r \cong \mathbb{R}^3$ ein Vektor. Dann gilt

$$R_q(p) = C_q(p) = p + 2v \times (v \times p + wp).$$

Die Berechnung von $C_q(p)$ erfordert daher 30 Elementaroperationen.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass für jedes weitere Quaternion $q' = \mathrm{Re}(q') + \mathrm{Im}(q') =: w' + v'$ gilt

$$\begin{aligned} qq' &= (w+v)(w'+v') \\ &= ww' + wv' + vw' + vv' \\ &= ww' + wv' + vw' + -\langle v, v'\rangle + v \times v' \\ &= (ww' - \langle v, v'\rangle) + wv' + vw' + v \times v' \end{aligned} \tag{5.1}$$

Benutzt man nun außerdem noch, dass

$$1 = \|q\|^2 = w^2 + \langle v, v\rangle \tag{5.2}$$

Damit berechnet man nun

$$\begin{aligned}
qpq^* &\overset{(5.1)}{=} (-\langle v, p\rangle + wp + v \times p)(w - v) \\
&= -w\langle v, p\rangle + w^2 p + wv \times p + \langle v, p\rangle v - wpv - (v \times p)v \\
&\overset{(2.6)}{=} -w\langle v, p\rangle + w^2 p + wv \times p + \langle v, p\rangle v - w(-\langle p, v\rangle + p \times v) - (v \times p)v \\
&= -w\langle v, p\rangle + w^2 p + wv \times p + \langle v, p\rangle v + w\langle p, v\rangle - wp \times v - (v \times p)v \\
&= w^2 p + 2wv \times p + \langle v, p\rangle v - (v \times p)v \\
&\overset{(5.2)}{=} p - \langle v, v\rangle p + \langle v, p\rangle v - (v \times p)v + 2wv \times p \\
&\overset{(2.6)}{=} p - \langle v, v\rangle p + \langle v, p\rangle v - (-\langle v \times p, v\rangle + (v \times p) \times v) + 2wv \times p \\
&= p - \langle v, v\rangle p + \langle v, p\rangle v - (v \times p) \times v + 2wv \times p \\
&\overset{(1.8)}{=} p - 2(v \times p) \times v + 2wv \times p \\
&= p + 2v \times (v \times p) + 2wv \times p \\
&= p + 2v \times (v \times p + wp).
\end{aligned}$$

□

5.2 Weitere Aspekte

Obwohl die Verwendung von Quaternionen in Sachen Zeitkomplexität gar nicht so gut abzuschneiden scheint, hat sie dennoch viele weitere Vorteile:

Speicherkomplexität Ein Quaternion benötigt nur 4 Zahlen, eine 3×3-Matrix 9. Das kann enorme praktische Vorteile haben (CPU-Caching).

Rundungsfehler Bei der Verkettung von Drehmatrizen können Rundungsfehler dazu führen, dass das Ergebnis keine Drehmatrix mehr ist. Die Normalisierung einer Matrix ist viel aufwändiger als die Normierung eines Quaternions.

Glatte Interpolation Häufig möchte man zwischen zwei Drehungen auch viele Zwischendrehungen berechnen (damit es so aussieht als würde ein Objekt fortwährend rotieren). Bei Matrizen ist es gar nicht so leicht die dazwischen liegenden Euler-Winkel zu bestimmen. Bei den Quaternionen kann man einfach den verbindenden Großkreis auf der $\mathbb{S}^3$ nehmen.

All das führt dazu, dass Quaternionen auch tätsächlich in der Computergrafik verwendet werden. Wir wissen aus dubioser Quelle, dass zum Beispiel das Half-Life SDK dazugehört.

Abbildung 5.9: Gordon Freeman

Index

Additionstheoreme, 5
Anti-Automorphismus, 15
Anti-Zentrum von $\mathbb{H}$, 16
Axiome, 3

Betrag, 7

Determinante, 9

Einheitsmatrix, 8
Einheitsquaternion, 18
Einheitssphäre, 5
Elementarrotationen, 24
euklidischer Raum, 4

Gimbal Lock, 25
Gruppe, 3
Gruppenhomomorphismus, 3

Hamilton, Sir William Rowan, 11

Imaginärteil
    einer komplexen Zahl, 6
    eines Quaternions, 14
invertierbar, 8
involutiv, 15

Jacobi-Identität, 5

Kern, 3
komplexe Konjugation, 7
komplexe Zahlen, 6
Konjugation, 15
Kreuzprodukt, 4

Länge, 4
Lagrange-Identität, 6

Matrix, 7
Matrixaddition, 7
Matrixmultiplikation, 8
Multiplikationstabelle für Quaternionen, 10

Norm, 4
    quaternionisch, 17
Nullmatrix, 8

pitch, 24

Quaternionen, 9
quaternionische Relationen, 11

Realteil
    einer komplexen Zahl, 6
    eines Quaternions, 14
rein imaginär, 14
Rodrigues-Rotation, 19
roll, 24

Satz
    Rotationssatz von Euler, 21
Schiefkörper, 11
Skalarmultiplikation, 4, 8
Skalarprodukt, 4
Spatprodukt, 6
spezielle orthogonale Gruppe, 21
Spur, 21
surjektiv, 22

trace, 21

Vektoraddition, 4
Vektoroperationen, 4
Versor, 18

Winkel, 5

yaw, 24

Zentrum von $\mathbb{H}$, 16

Symbolverzeichnis

q^*	quaternionische Konjugation, page 15
$\langle _, _ \rangle$	Skalarprodukt, page 4
$A(\mathbb{H})$	Anti-Zentrum von $\mathbb{H}$, page 16
$\mathbb{C}$	die komplexen Zahlen, page 6
det	die Determinantenfunktion, page 9
E_n	die Einheitsmatrix, page 8
$\mathrm{GL}(n)$	General Linear Group, page 8
$\mathbb{H}$	Quaternionen, page 9
$\mathbb{H}_r$	rein imaginäre Quarternionen, page 14
I	quaternionische imaginäre Einheit, page 9
i	imaginäre Einheit in $\mathbb{C}$, page 6
Im	Imaginärteil eines Quaternions, page 14
J	quaternionische imaginäre Einheit, page 9
$\mathbb{K}$	die reellen oder komplexen Zahlen, page 7
K	quaternionische imaginäre Einheit, page 9
$\ker f$	der Kern von f, page 3
$\bar{z}$	das komplex konjugierte von z, page 7
Re	Realteil eines Quaternions, page 14
$\mathbb{R}^n$	euklidischer Raum, page 4
Rod	Gruppe der Rodrigues-Rotationen, page 19
$\mathbb{S}^n$	euklidische Einheitssphäre der Dimension n, page 5
$\mathrm{SO}(3)$	spezielle orthogonale Gruppe der Dimension 3, page 21
$\mathbb{V}$	Versoren, page 18
$\measuredangle$	Winkel, page 5
$\times$	Kreuzprodukt, page 4
$Z(\mathbb{H})$	Zentrum von $\mathbb{H}$, page 16

Abbildungsverzeichnis

2.1 Multiplikationstabelle für Quaternionen 10
2.2 Brücke, http://www.geograph.org.uk/profile/8888 12
2.3 Hamilton 12
3.4 Rodrigues-Rotation 19
3.5 Rodrigues 20
4.6 Roll, Pitch, Yaw 24
5.7 Anzahl der Multiplikationen + Additionen 26
5.8 Komplexität von Drehungen 26
5.9 Gordon Freeman, http://springfieldpunx.blogspot.de/2010/12/itsgordon-freeman-yeah-couldnt-think-of.html 28

Literatur

[1] Wikipedia. Charts on so(3). http://en.wikipedia.org/wiki/Charts_on_SO(3), .

[2] Wikipedia. Covering space. http://en.wikipedia.org/wiki/Covering_space, .

[3] Wikipedia. William rowan hamilton. http://en.wikipedia.org/wiki/William_Rowan_Hamilton, .

[4] Wikipedia. Hypersphere of rotations. http://en.wikipedia.org/wiki/Hypersphere_of_rotations, .

[5] Wikipedia. Quaternions and spatial rotation. http://en.wikipedia.org/wiki/Quaternions_and_spatial_rotation, .

[6] Wikipedia. Quaternion. http://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion, .

[7] Wikipedia. Real projective space. http://en.wikipedia.org/wiki/Real_projective_space, .

[8] Wikipedia. Rodrigues rotation formula. http://en.wikipedia.org/wiki/Rodrigues'_rotation_formula, .

[9] Wikipedia. Olinde rodrigues. http://de.wikipedia.org/wiki/Olinde_Rodrigues, .

[10] Wikipedia. Rotation formalisms in three dimensions. http://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_formalisms_in_three_dimensions, .

[11] Wikipedia. So(3). http://en.wikipedia.org/wiki/SO(3), .