

**Klausur Infinitesimalrechnung I**  
**WS 1996/97 Prof. J. Frehse**

**B**

11.1.1997 9:00 - 12:00

- 1) Bestimmen Sie die Häufungspunkte der rekursiv definierten Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit:  
 $a_0 \in \mathbb{R}$ ,  $a_0 > -6$  beliebig, aber fest, und  $a_{n+1} := \sqrt{\frac{6+a_n}{2}}$ .
- 2 Zeigen Sie, daß für beliebiges  $p \in \mathbb{N}$  gilt:  $\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{2}{n^2-p^2} = \frac{1}{p}(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2p})$ .
- 3) Betrachten Sie die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Polynomfunktionen mit  $f_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{k^3}{4k+2} x^k$ .  
 Bestimmen Sie die größte reelle Zahl  $a$ , so daß  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $(0, a)$  punktweise gegen eine Funktion  $f : (0, a) \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert.  
 Zeigen Sie insbesondere, daß  $f$  auf  $(0, a)$  stetig ist.
- 4) Zeigen Sie, daß für die Exponentialfunktion  $\exp$  gilt:  $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ .
- 5) Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  habe folgende Eigenschaften:  
 i)  $f$  sei stetig in 0, ii)  $f(x+y) = f(x)f(y)$  für beliebige  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  
 iii)  $f(1) = e$ .  
 Zeigen Sie, daß  $f \equiv \exp$ .  
 Tip 1: Da  $\exp$  die Kriterien i) - iii) erfüllt, reicht es zu zeigen, daß diese Kriterien  $f$  eindeutig bestimmen.  
 Tip 2: Es gilt:  $f(2^{-k}) = (f(1))^{2^{-k}}$  für  $k \in \mathbb{N}$ . Beweis!
- 6) Sei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig, aber fest. Betrachten Sie die Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  
 $f(x) := \sqrt[n]{\frac{1+x^3}{3}}$ . Zeigen Sie, daß  $f$  einen Fixpunkt hat.
- 7 Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, daß es eine Konstante  $L > 0$  gibt mit der Eigenschaft:  $|f(x)| \leq L(1 + |x|)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .
- 8) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, und es gebe positive Konstanten  $c_0, C_1$ , so daß für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:  
 $f(x) \geq C_1 x^2 - c_0$ .  
 Zeigen Sie, daß  $f$  ein globales Minimum auf  $\mathbb{R}$  hat.

**Punktewertung**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
Punkte	4	6	6	4	5	5	6	4