

Analysis I – Klausur

Aufgabe 1 (3+3+3 Pkte). Überprüfe die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n^3}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n/2)}{n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cosh(n)}$

(kurze Begründung, z.B. Vergleich mit bekannten Reihen)

Aufgabe 2 (6+6+6 Pkte). Zeige:

a) $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

b) $n^2 \leq 2^n \leq n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n^k} = 1$

Aufgabe 3 (8 Pkte). Beweise die Formel

$$2 \sin(z) \cos(z) = \sin(2z) \quad (\forall z \in \mathbb{C})$$

mit Hilfe der Reihendarstellungen von \sin und \cos .
Dabei darf ohne Beweis verwendet werden, dass

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} = 2^{2n} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Aufgabe 4 (5+5+5 Pkte). Bestimme (jeweils mit kurzer Begründung)

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh(x) \cdot \cosh(x)}{\exp(x^2)}$
- b) $\lim_{x \downarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x) \cdot \sinh(x)}$
- c) die Ableitung der Funktion $f(x) = \exp(-x^4) \cdot \sin(\log x)$ auf $]0, \infty[$

Aufgabe 5 (6+4 Pkte).

- a) Zeige: $f :]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$, $x \mapsto (\sinh x)^3$ ist bijektiv mit differenzierbarer Inverse $g = f^{-1}$. Berechne g' .
- b) Zeige: Jede stetig differenzierbare Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ist Lipschitzstetig.

Aufgabe 6 (6+4 Pkte). Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle die Funktionalgleichung

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $xy < 1$ und es gelte $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} f(y) = 1$.

- a) Zeige: $f(0) = 0$ und f ist differenzierbar auf \mathbb{R} mit $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- b) Zeige, dass aus den in a) formulierten Eigenschaften folgt: $f = \arctan$ (Hauptzweig).

Die folgenden Aufgaben 7, 8 und 9 bestehen aus jeweils 10 Teilaufgaben. Jede Teilaufgabe ist mit **w** oder **f** zu beantworten (je nachdem, ob man die entsprechende Aussage für wahr oder falsch hält). Die Antworten sind nicht zu begründen und sollen bitte nicht kommentiert werden. Jede richtige Antwort zählt 1 Pkt.

Aufgabe 7 (10×1 Pkt). Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?

a) Die Menge

$$M_a = \{(x_1, \dots, x_n) \mid n \in \mathbb{N}, x_k \in \mathbb{Z} (\forall k = 1, \dots, n)\}$$

aller endlicher Folgen ganzer Zahlen ist abzählbar.

b) Die Menge M_b aller endlicher Folgen rationaler Zahlen ist abzählbar.

c) Die Menge $M_c = \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_k \in \mathbb{Q} (\forall k \in \mathbb{N})\}$ aller Folgen rationaler Zahlen ist abzählbar.

d) Jede beschränkte Teilmenge von \mathbb{R} enthält ein größtes Element

e) Die Menge $\{\sinh(ix) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ist beschränkt.

f) Die Menge $\{\cos(z) \mid z \in \mathbb{C}\}$ ist beschränkt.

g) $\forall z \in \mathbb{C} : z^2 \geq 0$ und $(z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0)$

h) $\forall x, y \in \mathbb{R} : |\exp(x + iy)| = \exp(x)$

i) $|\frac{3+4i}{1-i}| = \frac{5}{2}$

j) Für alle Aussagen A, B gilt: $(A \Rightarrow B) \vee (\neg A) \Rightarrow B$

Aufgabe 8 (10×1 Pkt). Welche der folgenden Aussagen über Folgen reeller Zahlen sind wahr, welche falsch?

- a) Jede Teilfolge einer Cauchy-Folge ist wieder eine Cauchy-Folge
- b) Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn jede ihrer Teilfolgen eine konvergente Teilfolge besitzt.
- c) Jede Folge enthält eine monotone Teilfolge.
- d) Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen mit $b_n = a_{n+1} - a_n$. Ist $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, so auch $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- e) Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen mit $c_n = a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n$. Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, so auch $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- f) Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen mit $d_n = \frac{1}{4}(a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n)$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ konvergiert.
- g) Mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$
- h) Mit $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
- i) Mit $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert auch $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- j) Mit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert auch $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$

Aufgabe 9 (10 × 1 Pkt). Welche der folgenden Aussagen über reelle Funktionen sind wahr, welche falsch?

- a) Jede stetige Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.
- b) Jede stetige, streng monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar.
- c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0) := 0$ und $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \neq 0$ ist differenzierbar in 0, aber nicht stetig differenzierbar.
- d) Jede streng monotone Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert zwischen $f(0)$ und $f(1)$ an.
- e) Jede gleichmäßig stetige Funktion $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt.
- f) Eine Funktion $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn sie zweimal differenzierbar ist mit $f'' \geq 0$.
- g) Jede konvexe Funktion $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.
- h) Jede streng monoton wachsende Funktion $f : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ ist unbeschränkt.
- i) Jede streng monoton fallende Funktion $f : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ ist beschränkt.
- j) Eine stetige Funktion $f : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ ist genau dann beschränkt, wenn $\limsup_{x \rightarrow \infty} f(x) < \infty$ ist, und in diesem Fall gilt

$$\sup_{x \in [0, \infty[} |f(x)| = \limsup_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

Musterlösungen zur Klausur vom 7.2.04

verantwortlich: A. Hahn

Korrekturvorschläge bitte an hahn@uni-bonn.de schicken

Aufgabe 1 a) Die Reihe divergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n^3} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \stackrel{(*)}{=} \infty$$

(*): Divergenz der harmonischen Reihe.

b) Die Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n/2)}{n} \text{ konvergiert} \stackrel{(*)}{\iff} \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{\sin(\pi n/2)}{n} \text{ konvergiert}$$
$$\stackrel{(**)}{\iff} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \text{ konvergiert.}$$

Nach dem Leibnitz-Kriterium konvergiert die letzte Reihe aber.

(*): $\sin(\pi n/2) = 0$ falls n gerade

(**): $\sin(\pi(2k+1)/2) = (-1)^k$.

c) Die Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cosh(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^n + e^{-n}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (1/e)^n \stackrel{(*)}{<} \infty$$

(*): Konvergenz der geometrischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ mit $q = 1/e < 1$.

Aufgabe 2

a) Die Behauptung folgt durch vollständige Induktion nach n :

Induktions-Verankerung ($n = 1$): Für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Induktionsschritt ($n \rightarrow n+1$):

Die Behauptung sei wahr für $n \in \mathbb{N}$ (Induktions-Voraussetzung). Dann

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 \stackrel{I.Vor.}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} (n^2 + 4(n+1)) = \frac{(n+1)^2}{4} (n+2)^2 = \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4} \end{aligned}$$

b) Die Behauptung folgt durch vollständige Induktion nach n :

Induktions-Verankerung ($n = 4$): Für $n = 4$ gilt

$$16 \leq 16 \leq 24 \Rightarrow 4^2 \leq 2^4 \leq 4! \Rightarrow n^2 \leq 2^n \leq n!$$

Induktionsschritt ($n \rightarrow n+1$):

Die Behauptung sei wahr für $n \geq 4$ (Induktions-Voraussetzung).

Dann gilt einerseits:

$$(n+1)^2 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 n^2 \stackrel{I.Vor.}{\leq} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 2^n \stackrel{(*)}{\leq} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

$$(*) : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \leq \left(1 + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \leq 2.$$

Andererseits haben wir:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \stackrel{I.Vor.}{\leq} 2 \cdot n! \leq (n+1) \cdot n! = (n+1)!$$

c)

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n^k} &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n^k} - 1 - \frac{1}{n}\right) \stackrel{(*)}{=} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{1-1/n} - 1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n-1} - \frac{1+n}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - (n-1)(n+1)}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=2}^N \frac{1}{n-1} - \sum_{n=2}^N \frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^N \frac{1}{n}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{N}\right) = 1 \end{aligned}$$

(*) : Folgt wegen $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ für $q := \frac{1}{n} < 1$.

Aufgabe 3 Für $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (1)$$

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad (2)$$

Damit

$$\begin{aligned} 2 \sin(z) \cos(z) &= 2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \times \left(\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{z^{2l}}{(2l)!} \right) \\ &\stackrel{(*)}{=} 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^{n-k} \frac{z^{2(n-k)}}{(2(n-k))!} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)!(2(n-k))!} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n+1} \frac{1}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^n \frac{(2n+1)!}{(2k+1)!(2(n-k))!} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n+1} \frac{1}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} \\ &\stackrel{(**)}{=} 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n+1} \frac{1}{(2n+1)!} 2^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(2z) \end{aligned}$$

(*): Die rechten Seiten von (1), (2) konvergieren absolut
 \Rightarrow Formel für Cauchy-Produkt anwendbar.

(**): $\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} = 2^{2n}$ durfte ohne Beweis benutzt werden.

Aufgabe 4 a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh x \cosh x}{\exp(x^2)} = 0$: Für $x \geq 0$ gilt:

$$0 \leq \frac{\sinh(x) \cosh(x)}{\exp(x^2)} \leq \frac{\frac{1}{4}(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{\exp(x^2)} \\ \leq \frac{1}{4} \frac{e^x 2e^x}{\exp(x^2)} = \frac{1}{2} \exp(2x - x^2) \quad (3)$$

Wegen $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - x^2) = -\infty$ und $\lim_{y \rightarrow -\infty} \exp(y) = 0$ folgt zunächst $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(2x - x^2) = 0$ und dann aus (3) und dem Einschnürungsprinzip die Behauptung.

b) zweimalige Anwendung der Regel von de l'Hospital (bei (*), (**)) ergibt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x) \sinh(x)} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{\cos(x) \sinh(x) + \sin(x) \cosh(x)} \\ \stackrel{(**)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos(x)}{-\sin(x) \sinh(x) + \cos(x) \cosh(x) + \cos(x) \cosh(x) + \sin(x) \sinh(x)} \\ = \frac{-1}{-0 + 1 + 1 + 0} = -\frac{1}{2}$$

c)

$$\frac{d}{dx} [\exp(-x^4) \sin(\log x)] \\ \stackrel{(*)}{=} \sin(\log x) \frac{d}{dx} \exp(-x^4) + \exp(-x^4) \frac{d}{dx} \sin(\log x) \\ \stackrel{(**)}{=} \sin(\log x) (-4x^3 \exp(-x^4)) + \exp(-x^4) \cos(\log x) \frac{1}{x} \\ = \exp(-x^4) (\cos(\log x) \frac{1}{x} - 4x^3 \sin(\log x))$$

(*): Produktregel

(**): zweimal Kettenregel

Aufgabe 5 a) i) f ist surjektiv: f ist die Verkettung stetiger Funktionen und somit selbst stetig. Wegen $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} (\sinh x)^3 = (\sinh(0))^3 = 0$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sinh x)^3 = \infty$ folgt aus dem Zwischenwertsatz also die Behauptung.

ii) f ist injektiv: Dies folgt sofort aus Teil iii).

iii) $f' > 0$: f ist die Verkettung differenzierbarer Funktionen und somit selbst differenzierbar. Anwendung der Kettenregel ergibt

$$f'(x) = 3(\sinh x)^2 \cosh(x) > 0$$

da $\sinh(x) \neq 0$ für $x \neq 0$ und $\cosh(x) \geq 1$ für $x \in \mathbb{R}$.

iv) Existenz und Berechnung der Ableitung von $g := f^{-1}$: Aus iii) ergibt sich mit Hilfe eines Standardsatzes (der wiederum leicht aus der Kettenregel folgt, vgl. Vorlesung oder Forster, Königsberger, ...), dass g differenzierbar ist und dass für jedes $x \in]0, \infty[$ gilt:

$$g'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Nun ist aber $f'(x) = 3(\sinh x)^2 \cosh(x) = 3(\sinh x)^2 \sqrt{1 + \sinh^2(x)}$ und $f^{-1}(y) = \sinh^{-1}(\sqrt[3]{y})$. Damit bekommen wir

$$g'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2 \sqrt{1 + (\sqrt[3]{x})^2}} = \frac{1}{3x^{2/3} \sqrt{1 + x^{2/3}}}$$

b) Da die Funktion $f' : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem abgeschlossenen (!) Intervall $[0, 1]$ nach Voraussetzung stetig ist, ist f' beschränkt (vgl. Satz der Vorlesung), d.h. $\exists L > 0 : \forall x \in [0, 1] : |f'(x)| \leq L$. Aus dem Schrankensatz folgt also $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \in [0, 1]$. Dies war zu zeigen.

Aufgabe 6

a) Zu zeigen sind folgende Aussagen:

- i) $f(0) = 0$:
- ii) f is differenzierbar auf \mathbb{R}
- iii) $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Beweis von i): $f(0) + f(0) \stackrel{Fktl.Gl}{=} f\left(\frac{0+0}{1-0 \cdot 0}\right) = f(0) \Rightarrow f(0) = 0$.

(simultaner) Beweis von ii) und iii). 1. Möglichkeit:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \stackrel{(1)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(-x)}{h} \stackrel{Fktl.Gl}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f\left(\frac{h}{1+x^2-hx}\right) \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+x^2-hx}{h} f\left(\frac{h}{1+x^2-hx}\right) \right) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2-hx} \stackrel{(2)}{=} 1 \cdot \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

(1): $f(-x) = -f(-x)$, da $f(x) + f(-x) \stackrel{Fktl.Gl}{=} f\left(\frac{x-x}{1+x \cdot x}\right) = f(0) \stackrel{i)}{=} 0$

(2): $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{1+x^2-hx} = 0$ sowie $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{y} = 1$ (vgl. Voraussetzung)

Wichtig: Die Existenz jedes vorkommenden Limes folgt aus der Existenz des jeweils nachfolgenden Limes. Insbesondere wird durch die obige Gleichungskette wirklich die Existenz von $f'(x)$ bewiesen.

(simultaner) Beweis von ii) und iii). 2. Möglichkeit:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \stackrel{(1)}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) - f(x)}{\frac{x+y}{1-xy} - x} \stackrel{Fktl.Gl}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{\frac{x+y}{1-xy} - x} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{y} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\frac{x+y}{1-xy} - x} \stackrel{(2)}{=} 1 \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\frac{x+y}{1-xy} - x} \\ &\stackrel{(3)}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dy} y}{\frac{d}{dy} \left(\frac{x+y}{1-xy} - x\right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1-xy} - \frac{x+y}{(1-xy)^2} \cdot (-x) \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{1-x \cdot 0} - \frac{x+0}{(1-x \cdot 0)^2} \cdot (-x) \right)^{-1} = (1 - x \cdot (-x))^{-1} = \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

$$(1): \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x+y}{1-xy} = x$$

$$(2): \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{y} = 1 \text{ (vgl. Voraussetzung)}$$

(3): Regel von de l'Hospital

Wichtig: Die Existenz jedes vorkommenden Limes folgt aus der Existenz des jeweils nachfolgenden Limes. Insbesondere wird durch die obige Gleichungskette wirklich die Existenz von $f'(x)$ bewiesen.

b) Bekanntlich ist $\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Damit gilt

$$\frac{d}{dx} (\arctan(x) - f(x)) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

also ist $\arctan(x) - f(x)$ konstant. Wegen

$$\arctan(0) - f(0) \stackrel{i)}{=} \arctan(0) - 0 = 0$$

($\arctan(0) = 0$ für den Hauptzweig) folgt die Behauptung.

Aufgabe 7 a) Korrekt. Begründung völlig analog zur Begründung von Teil b).

- b) Korrekt. Offenbar gilt $M_b = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}^k$. \mathbb{Q} ist abzählbar, damit auch $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ und allgemein \mathbb{Q}^k für beliebiges k (Beweis durch vollständige Induktion). $M_b = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}^k$ ist damit die abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen und somit selbst abzählbar.
- c) Falsch! Nicht einmal die Teil-Menge $M_e = \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_k \in \{-1, 1\} (\forall k \in \mathbb{N})\}$ von M_e ist abzählbar: man sieht leicht, dass M_e bijektiv auf die Potenzmenge von \mathbb{N} abgebildet werden kann. Gemäß Aufgabe 3 auf Aufgabenblatt 5 ist damit M_e und erst recht M_c überabzählbar.
- d) Falsch! Gegenbeispiel: Das offene Intervall $]0, 1[$.
- e) Korrekt. Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sinh(ix) = \frac{1}{2}(e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{1}{2}(\cos(x) + i \sin(x) - (\cos(x) - i \sin(x))) = i \sin(x)$. Wegen $|i \sin(x)| = |\sin(x)| \in [0, 1]$, $x \in \mathbb{R}$ ist $\{\sinh(ix) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{i \sin(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ also beschränkt.
- f) Falsch! Für beliebiges $x \in \mathbb{C}$ gilt $\cosh(ix) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{1}{2}(\cos(x) + i \sin(x) + (\cos(x) - i \sin(x))) = \cos(x)$ und damit $\cos(ix) = \cosh(-x)$. Wegen $\lim_{x \rightarrow \infty} \cosh(-x) = \infty$ kann also nicht einmal die Teilmenge $\{\cos(ix) \mid x \in \mathbb{R}\}$ von $\{\cos(z) \mid z \in \mathbb{C}\}$ beschränkt sein.
- g) Falsch! Die Schreibweise $z^2 \geq 0$ ist eine schlampige Schreibweise für $z^2 \in \mathbb{R}_+$. Dies ist jedoch falsch. Gegenbeispiel: $z := \exp(\pi i/4)$ (für dieses z gilt ja $z^2 = \exp(2 \cdot \pi i/4) = i$).
- Bemerkung: Die Behauptung der Aufgabe wird richtig, wenn man überall z^2 durch $|z|^2$ ersetzt.
- h) Korrekt. Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|\exp(x + iy)| = |\exp(x)| \cdot |\exp(iy)| = |\exp(x)| \cdot 1 = \exp(x)$ da $\exp(x) \geq 0$.
- i) Falsch! $\left| \frac{3+4i}{1-i} \right| = \left| \frac{\sqrt{3^2+4^2}}{\sqrt{1^2+1^2}} \right| = \frac{5}{\sqrt{2}} \neq \frac{5}{2}$
- j) Falsch! Gegenbeispiel: Nehme sowohl für A als auch für B die (natürlich falsche) Aussage $0 = 1$. Dann ist $\neg A$ und damit auch $(A \Rightarrow B) \vee (\neg A)$ wahr. Da B falsch ist, ist somit $(A \Rightarrow B) \vee (\neg A) \Rightarrow B$ falsch.

Aufgabe 8 a) Korrekt. Dies folgt leicht aus der Definition des Begriffes "Cauchy-Folge". Alternativ kann man unter Ausnutzung der Vollständigkeit von \mathbb{R} wie folgt argumentieren: Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, so konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Also konvergiert auch jede Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und ist somit eine Cauchy-Folge.

b) Falsch! Gegenbeispiel: Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = (-1)^n$ konvergiert nicht, trotzdem hat sie die Eigenschaft, dass jede ihrer Teilfolgen eine konvergente Teilfolge besitzt:

In jeder Teilfolge von $(x_n)_n$ kommt nämlich die Zahl 1 oder aber die Zahl -1 unendlich oft vor. Im ersten Fall bekommt man durch Weglassen aller " -1 " eine (unendliche) Folge, die nur den Wert 1 annimmt und somit konvergiert. Im zweiten Fall bekommt man durch Weglassen aller " 1 " eine unendliche Folge, die nur den Wert -1 annimmt und somit konvergiert.

c) Korrekt. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge reeller Zahlen. Wir betrachten die Menge

$$A := \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ mit } \forall m \geq n : x_n \geq x_m\}$$

1. Fall: A ist unendlich. Bezeichnet dann n_j für $j \in \mathbb{N}$ das j -kleinste Element von A , so ist $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Fall: A ist endlich. Dann lässt sich für jedes hinreichend "späte" Glied von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein nachfolgendes Folgenglied finden, welches größer ist. (genauer: $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \exists m > n : x_m > x_n$). Daraus folgt aber sofort, dass man eine (sogar streng) monoton wachsende Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konstruieren kann. (Details: Definiere $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$ rekursiv durch $n_1 := n_0$ wo n_0 wie oben und $n_{j+1} := \min\{n \in \mathbb{N} \mid n > n_j \text{ mit } x_n > x_{n_j}\}$. Offensichtlich ist dann $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ eine (streng) monoton wachsende Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$).

d) Falsch! Gegenbeispiel: $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n = \frac{1}{n}$ und $a_n = \sum_{k=1}^n b_k$. Offensichtlich konvergiert $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, es gilt $b_n = a_{n+1} - a_n$, aber die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert nicht: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist je gerade die Partialsummenfolge der (bekanntlich divergenten) harmonische Reihe.

- e) Korrekt. Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, so auch die Folgen $(2a_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(a_{n+2})_{n \in \mathbb{N}}$. Da man durch die gliedweise Addition endlich vieler konvergenter Folgen stets eine weitere konvergente Folge bekommt, ist die Behauptung korrekt.
- f) Falsch! Gegenbeispiel: Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $a_n = (-1)^n$ und $d_n = \frac{1}{4}(a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n)$ definiert. $(a_n)_n$ ist keine Nullfolge, also kann $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht konvergieren. Da aber $d_n = 0$ für jedes n ist, ist $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ trivialerweise auch konvergent.
- g) Korrekt. Bekanntlich ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$. Ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$, so folgt $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n}{n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n| \frac{1}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + \frac{1}{n^2}) < \infty$. Also konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ sogar absolut.
- h) Korrekt. Die Behauptung besagt ja gerade, dass jede absolut konvergente Reihe konvergiert.
- i) Falsch! Gegenbeispiel: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$.
- j) Korrekt. Die Funktion $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig. Bekanntlich gilt für jede stetige Funktion:
 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent $\Rightarrow (f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent (und zwar gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)$).

Aufgabe 9 a) Korrekt, vgl. Standardlehrbücher der Analysis (Königsberger, Fischer, ...).

b) Falsch! Gegenbeispiele

$$f(x) := \begin{cases} 2x & \text{für } x \geq 0 \\ x & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

oder

$$g(x) := \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

f, g sind stetig, streng monoton wachsend aber im Punkt $x = 0$ (aus unterschiedlichen Gründen) nicht differenzierbar.

c) Falsch! f ist im Punkt 0 nicht differenzierbar, da einerseits $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \sin(1/h)$ gilt und da andererseits $\lim_{h \rightarrow 0} \sin(1/h)$ nicht existiert.

d) Falsch! Gegenbeispiel

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x + 1 & \text{für } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

f ist streng monoton wachsend, nimmt aber den Wert $1 \in [0, 2] = [f(0), f(1)]$ nicht an.

(Beachte: Der Zwischenwertsatz gilt für *stetige* Funktionen. f war aber nicht als stetig vorausgesetzt.)

e) Korrekt. Wähle $\epsilon > 0$ beliebig. Da f gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass $\forall x, y \in]0, 1[: [|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon]$ gilt. Sei N die kleinste natürliche Zahl, welche größer als $\frac{1}{\delta}$ ist. Für beliebiges $x \in]0, 1[$ ist dann das Intervall zwischen x und $\frac{1}{2}$ die Aneinanderreihung von genau N Intervallen der Länge $\frac{|1/2-x|}{N} < \delta$. Auf jedem dieser N Intervalle kann f also höchstens um den Wert ϵ schwanken. Aus der Dreiecksungleichung folgt dann sofort $|f(x) - f(1/2)| \leq N \cdot \epsilon$. Damit bekommen wir:

$$\forall x \in]0, 1[: -N \cdot \epsilon - f(1/2) \leq f(x) \leq N \cdot \epsilon + f(1/2)$$

f) Falsch! Eine konvexe Funktion $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ braucht nicht differenzierbar (geschweige denn 2-mal differenzierbar) zu sein. Gegenbeispiel: $f(x) := |x - 1/2|$ für $x \in]0, 1[$. f ist konvex aber im Punkt $x = 1/2$ nicht differenzierbar.

g) Korrekt. vgl. Vorlesung oder Königsberger.

h) Falsch! Gegenbeispiel: $f(x) := 1 - \frac{1}{1+x}$ für $x \in [0, \infty[$. f ist streng monoton wachsend und beschränkt.

i) Korrekt, denn offensichtlich ist $f(0)$ eine obere Schranke und 0 eine untere Schranke von f .

j) Falsch! Gegenbeispiel: $f(x) := \frac{1}{1+x}$ für $x \in [0, \infty[$. Offensichtlich ist

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x)| = 1 \neq 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \limsup_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

Klausur Infinitesimalrechnung I
WS 1996/97 Prof. J. Frehse

B

11.1.1997

9:00 - 12:00

- 1) Bestimmen Sie die Häufungspunkte der rekursiv definierten Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit:
 $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_0 > -6$ beliebig, aber fest, und $a_{n+1} := \sqrt{\frac{6+a_n}{2}}$.
- 2) Zeigen Sie, daß für beliebiges $p \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{2}{n^2-p^2} = \frac{1}{p}(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2p})$.
- 3) Betrachten Sie die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Polynomfunktionen mit $f_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{k^3}{4^{k+2}} x^k$.
Bestimmen Sie die größte reelle Zahl a , so daß $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $(0, a)$ punktweise gegen eine Funktion $f : (0, a) \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert.
Zeigen Sie insbesondere, daß f auf $(0, a)$ stetig ist.
- 4) Zeigen Sie, daß für die Exponentialfunktion \exp gilt: $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.
- 5) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ habe folgende Eigenschaften:
i) f sei stetig in 0, ii) $f(x+y) = f(x)f(y)$ für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$,
iii) $f(1) = e$.
Zeigen Sie, daß $f \equiv \exp$.
Tip 1: Da \exp die Kriterien i) - iii) erfüllt, reicht es zu zeigen, daß diese Kriterien f eindeutig bestimmen.
Tip 2: Es gilt: $f(2^{-k}) = (f(1))^{2^{-k}}$ für $k \in \mathbb{N}$. Beweis!
- 6) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. Betrachten Sie die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit
 $f(x) := \sqrt[n]{\frac{1+x^3}{3}}$. Zeigen Sie, daß f einen Fixpunkt hat.
- 7) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, daß es eine Konstante $L > 0$ gibt mit der Eigenschaft: $|f(x)| \leq L(1 + |x|)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- 8) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, und es gebe positive Konstanten c_0, C_1 , so daß für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
 $f(x) \geq C_1 x^2 - c_0$.
Zeigen Sie, daß f ein globales Minimum auf \mathbb{R} hat.

Punktewertung

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
Punkte	4	6	6	4	5	5	6	4

- 1 Was besagt das Intervallschachtelungsprinzip für \mathbb{R} ?
- 2 Berechnen Sie für $k \in \mathbb{N}$ den Grenzwert der Folge (a_n) mit

$$a_n := \frac{1}{n^k} \binom{n}{k} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

- 3 Beweisen Sie, dass für beliebige $a_1, \dots, a_n \in [0, 1]$ folgende Ungleichung gilt:

$$\prod_{i=1}^n (1 - a_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^n a_i.$$

- 4 Wie lautet die Definition einer Cauchyfolge?
- 5 Überprüfen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n / \sqrt{n^2 + 3}$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz.
- 6 Zeigen Sie für $e = \sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$ und $n \in \mathbb{N}$

$$e < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}. \quad ?$$

- 7 Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2n^2 + 3} x^n$.
Radius = 1/2
- 8 Was besagt das Leibnizkriterium für die Konvergenz von Reihen und wie lautet die zugehörige Fehlerabschätzung?
- 9 Für $z \in \mathbb{C}$ sei

$$s(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{und} \quad c(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Beweisen Sie die absolute Konvergenz der Reihen und zeigen Sie mit Hilfe des Cauchy-Produktes $c(z)^2 - s(z)^2 = 1$.

- 10 Sei $M \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge mit $a_0 \neq 0$ und $|a_n| < M$ für $n > 0$. Für $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ ist die Funktion $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ wohldefiniert. Zeigen Sie, dass f für

$$|z| < \frac{|a_0|}{M + |a_0|}$$

keine Nullstelle hat.