Nachklausur Lineare Algebra I, WS 2005/2006, 08.04.2006

****

In allen Aufgaben ist K ein Körper. Mit $\mathbb{R}$ ist der Körper der reellen Zahlen gemeint, und $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen. Mit $\varnothing$ bezeichnen wir die leere Menge.

****

Aufgabe 1

(1+1+1+1)

Gib jeweils an, welche Aussagen RICHTIG sind. Pro Aufgabe können mehrere Optionen richtig sein. Schreibe z.B. "$(c)\colon A, D$" wenn Du denkst, daß in Aufgabe 1 (c) die Optionen A und D richtig sind.

(a) Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

- $\boxed{\text{A}}$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \mapsto |a|$ (Betrag von a);
- $\boxed{\text{B}}$ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) \mapsto ab$;
- $\boxed{\text{C}}$ $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 2c \\ 3a-c \end{smallmatrix}\right)$;
- $\boxed{\text{D}}$ Die Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche die Spiegelung an der x-Achse beschreibt.

(b) Sei A eine invertierbare $n \times n$-Matrix.

- $\boxed{\text{A}}$ Die Zeilen von A sind linear unabhängig;
- $\boxed{\text{B}}$ $\text{Rang}(A) > n$;
- $\boxed{\text{C}}$ $\text{Rang}(A) \leq n$;
- $\boxed{\text{D}}$ $\text{Rang}(A) = n$.

(c) Seien U und W Unterräume eines Vektorraumes V mit $U + W = V$.

- $\boxed{\text{A}}$ $U \cap W = \varnothing$;
- $\boxed{\text{B}}$ $U \cap W = 0$;
- $\boxed{\text{C}}$ $\dim U + \dim W = \dim V$;
- $\boxed{\text{D}}$ $\dim U + \dim W \geq \dim V$.

(d) Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

- $\boxed{\text{A}}$ $\dim \text{Kern}(f) \leq \dim V$;
- $\boxed{\text{B}}$ $\dim \text{Bild}(f) \leq \dim V$;
- $\boxed{\text{C}}$ Wenn f ein Epimorphismus ist, dann ist f auch ein Isomorphismus;
- $\boxed{\text{D}}$ Sei B_1 eine Basis von $\text{Kern}(f)$, und sei B_2 eine Basis von $\text{Bild}(f)$. Dann ist $B_1 \cup B_2$ eine Basis von V.

****

Aufgabe 2

(1+1+1+1)

Seien

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid a + c = 0, b + d = 0 \right\}$$

und

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid a + b = 0, a + d = 0 \right\}$$

Bestimme Basen von U, W, $U \cap W$ und $U + W$.

****

Aufgabe 3

(2+2)

(a) Berechne die Determinante und gegebenenfalls das Inverse der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in M(3, \mathbb{R})$$

(b) Beweise: Ist $A \in M(n, K)$ mit $A^2 = A$ und $\det(A) \neq 0$, dann gilt $A = E_n$.

****

Aufgabe 4

(1+1+1+1)

Sei V ein K-Vektorraum, und sei $f \colon V \to V$ eine K-lineare Abbildung.

- Definiere "Eigenwert von f";
- Definiere "Eigenvektor von f";
- Sei nun V endlich-dimensional. Wieviele Eigenwerte kann f haben?
- Konstruiere ein Beispiel einer $\mathbb{R}$-linearen Abbildung $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche keinen Eigenwert besitzt. Gib eine kurze Begründung.

****

Aufgabe 5

(1+1+1+1)

Sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Folgen $(a_n)_{n \geq 1}$ reeller Zahlen, und sei

$$f \colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

die Abbildung, welche definiert ist durch $f((a_n)_{n\geq 1}) = (a_{n+1} - a_n)_{n \geq 1}$. (Das heißt eine Folge $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ wird von f abgebildet auf die Folge $(a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots)$.

- Zeige, daß f eine lineare Abbildung ist;
- Bestimme alle Eigenwerte von f;
- Bestimme Kern(f);

- Bestimme $\mathrm{Bild}(f)$.

****

Aufgabe 6

(4)

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, und seien f und g Endomorphismen von V mit $g \circ f = \mathrm{id}_V$. Zeige, daß dann auch $f \circ g = \mathrm{id}_V$ gilt.

****

Aufgabe 7

(1+1+2)

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Endomorphismus, welcher definiert ist durch

$$f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ a+b \end{pmatrix}$$

für alle $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

- Bestimme die Koordinatenmatrix $\mathbf{c}_B^B(f)$ von f bezüglich der Basis
  $$B = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$
  von $\mathbb{R}^2$.
- Bestimme die Koordiantenmatrix $\mathbf{c}_C^C(f)$ von f bezüglich der Basis
  $$C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$
  von $\mathbb{R}^2$.
- Konstruiere eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ (und auch S^{-1}) mit
  $$S^{-1}\mathbf{c}_B^B(f)S = \mathbf{c}_C^C(f).$$

****

Maximale Punktezahl: **28**

****

VIEL ERFOLG!