

Lineare Algebra I — Klausur

Aufgabe 1

Bestimme eine Basis des Kerns und eine Basis des Bildes der linearen Abbildung

$$\ell_A: \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^4,$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -4 & -5 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 3}(\mathbb{Q}).$$

(8+4 Punkte)

Aufgabe 2

Sei K ein Körper, sei $n \geq 1$ eine ganze Zahl, und seien $x, a_1, \dots, a_n \in K$. Sei

$$A = \begin{pmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{pmatrix} \in M_{n+1}(K).$$

Zeige:

$$\det A = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n).$$

(11 Punkte)

Aufgabe 3

Sei $U \subseteq \mathbb{Q}^4$ der von den folgenden Vektoren erzeugte Unterraum:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Bestimme die Dimension von U und gib Unterräume $W, W' \subseteq \mathbb{Q}^4$ an (durch Angabe von Basen von W und W'), so dass gilt:

- i) U und W sind Komplementäräume in \mathbb{Q}^4 ,
- ii) U und W' sind Komplementäräume in \mathbb{Q}^4 ,
- iii) W und W' sind Komplementäräume in \mathbb{Q}^4 .

(4+10 Punkte)

Aufgabe 4

Sei

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q}).$$

- Berechne das charakteristische Polynom von A .
- Berechne die Eigenwerte von A in \mathbb{Q} .
- Berechne Basen der Eigenräume von A (über \mathbb{Q}).
- Ist A diagonalisierbar über \mathbb{Q} ? Ist A trigonalisierbar über \mathbb{Q} ?

(7+2+6+2 Punkte)

Aufgabe 5

Sei K ein Körper, und sei V ein K -Vektorraum. Sei $n \geq 2$ eine ganze Zahl und seien $v_1, \dots, v_n \in V$ linear abhängige Vektoren, von denen jeweils $n-1$ linear unabhängig sind. Zeige:

- Es existieren $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K \setminus \{0\}$, so dass $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$.
- Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ wie in a). Seien $\beta_1, \dots, \beta_n \in K$ Elemente mit $\sum_{i=1}^n \beta_i v_i = 0$. Dann existiert $\gamma \in K$, so dass $\beta_i = \gamma \alpha_i$ für alle $i = 1, \dots, n$.

(6+10 Punkte)

Aufgabe 6

Seien K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum und sei $f: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung.

- Zeige, dass f genau dann von der Form $c \cdot \text{id}_V$ für ein $c \in K$ ist, wenn jeder Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von f ist.
- Zeige, dass f genau dann invertierbar ist, wenn 0 kein Eigenwert von f ist.
- Sei nun f invertierbar und sei λ ein Eigenwert von f . Zeige, dass λ^{-1} ein Eigenwert von f^{-1} ist, und dass

$$V(\lambda, f) = V(\lambda^{-1}, f^{-1}).$$

(8+4+6 Punkte)

Aufgabe 7

Sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum. Ferner sei $f: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung.

- Zeige: Ist $f^2 = 0 \in \text{End}_K(V)$, so gilt $\dim \ker f \geq \frac{1}{2} \dim V$.
- Gilt auch die Umkehrung von a)? (Beweis oder Gegenbeispiel)

(6+6 Punkte)